Cours 1

Démontrer l'inégalité de convexité.

Cours 2

Démontrer le théorème de comparaison par équivalence pour les fonctions positives.

Cours 3

La fonction f est convexe ssi pour tout $a \in I$, la fonction $\varphi_a : x \in I \setminus \{a\} \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante.
En déduire que f dérivable est convexe sur I ssi f' est croissante.

Exercice 1 - *

1) Montrer que $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^a+e^b}{2}$ pour $a, b \in \mathbb{R}$.
2) Montrer que $t \mapsto \ln(\ln t)$ est concave sur $]1; +\infty[$.
3) En déduire que $\forall a, b > 1, \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln a \ln b}$.

Exercice 2 - *

1) Démontrer la convergence de l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)dt$.
2) Exprimer les intégrales $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)dt$ et $J = \int_0^{\pi} \ln(\sin t)dt$ en fonction de I.
3) Exprimer $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t \cos t)dt$ en fonction de I, K
4) En déduire les valeurs de I, J, K, L

Exercice 3 - *

Donner la nature de :

$$\int_0^1 \frac{x}{(1-x)^2}dx, \int_0^1 \frac{1}{1-\sqrt{x}}dx, \int_0^{+\infty} 2^{-x}x^4dx$$

Exercice 4 - **

Soit $0 < a < b$.
1) Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t} dt$.
2) Soient $0 < x < y$. Montrer que

$$\int_x^y \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t} dt = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

3) Démontrer que pour tout $z > 0$,

$$e^{-bz} \ln \frac{b}{a} \leq \int_{az}^{bz} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq e^{-az} \ln \frac{b}{a}$$

4) En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t} dt = \ln \frac{b}{a}$.

Exercice 5 - **

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Supposons que $\forall x, y \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{x+y}{2}$. Montrer que f est convexe.

Exercice 6 - **

Soit $a < b$, $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et convexe. Montrer que :

$$g\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b g(f(t))dt$$

Exercice 7 - ***

Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et $a_1, \dots a_n, b_1, \dots b_n \in \mathbb{R}_+^*$.
1) Montrer que $xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$.
2) Supposons dans cette question que $\sum_{i=1}^n a_i^p = \sum_{j=1}^n b_i^q = 1$, montrer que $\sum_{k=1}^n a_i b_i \leq 1$.
3) En déduire l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{k=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n b_j^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

4) En déduire l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Solution 1

1) exp est convexe.
2) Sa dérivée est $\frac{1}{t\ln t}$ qui est décroissant, d'où sa concavité.
3) On a $\ln\ln(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{2}(\ln\ln a + \ln\ln b)$, et quand on passe à l'exponentielle, on obtient exactement le résultat.

Solution 2

1) L'impropreté de cette intégrale est en 0. Puisque $\sin t = t\phi(t)$ avec ϕ continue qui tend vers 1 en 0. Alors on a $\ln(\sin t) = \ln t + \ln(\phi(t))$, le premier étant intégrable en 0 et le second continu en 0.
2) Par le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$, on montre que $K = I$, et en séparant $]0;\pi[$ en deux intervalles $]0;\frac{\pi}{2}[$ et $]\frac{\pi}{2};\pi[$, on montre que $J = 2I$.
3) $L = I + K$
4) Puisque $\sin t\cos t = \frac{\sin 2t}{2}$, on a aussi

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin 2t}{2}\right) dt = \int_0^{\pi} \ln\left(\frac{\sin x}{2}\right)\frac{1}{2}dx = \frac{J}{2} - \frac{\pi\ln 2}{2}$$

Ainsi, on sait que $I = L - K = (\frac{J}{2} - \frac{\pi\ln 2}{2}) - I = -\frac{\pi\ln 2}{2}$.

Solution 3

1) Pas de soucis à gauche, et à droite il est équivalent à $\frac{1}{(1-x)^2}$ qui n'est pas intégrable. (faire un changement de variable $u = 1 - x$ pour s'en convaincre).
2) Pas de soucis en 0, et en 1 il faut écrire que $1 - \sqrt{x} \sim_{x\to 1} \frac{1-x}{2}$, donc en inversant on voit que l'intégrale diverge.
3) Intégrable par comparaison de l'exponentielle et de x^4.

Solution 4

1) En $+\infty$ c'est évident, et en 0 on fait un développement limité en 0 des deux exponentielles.
2) On sépare les deux intégrales et on fait un changement de variable $u = at$ et $v = bt$ et on réarrange les intégrales.
3) Par croissance de l'exponentielle, on a $e^{-bz} \leq e^{-t} \leq e^{-az}$ pour $t \in [az;bz]$, et on intègre le $\frac{1}{t}$ restant.
4) On fixe y et on va faire tendre x vers 0. En utilisant les deux questions précédentes avec $z = x$, on a :

$$e^{-bx}\ln\frac{b}{a} - \int_{ay}^{by}\frac{e^{-t}}{t}dt \leq \int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}dt \leq e^{-at}\ln\frac{b}{a} - \int_{ay}^{by}\frac{e^{-t}}{t}dt$$

On fait tendre x vers 0 et on obtient $\int_0^y \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt = \ln\frac{b}{a} - \int_{ay}^{by}\frac{e^{-t}}{t}dt$. On fait maintenant tendre y vers $+\infty$ et on utilise le 3) en $z = y$ et on obtient :

$$e^{-by}\ln\frac{b}{a} \leq \int_{ay}^{by}\frac{e^{-t}}{t}dt \leq e^{-ay}\ln\frac{b}{a}$$

et les deux côtés tendent vers 0 quand y tend vers l'infini, ce qui nous donne le résultat demandé.

Solution 5

On va montrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in [\![0; 2^n]\!]$, et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $f\left(\frac{p}{2^n}x + \left(1 - \frac{p}{2^n}\right)y\right) \leq \frac{p}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{p}{2^n}\right)f(y)$.

— Pour $n = 0$, c'est direct.

— Supposons l'hypothèse vérifiée en $n \in \mathbb{N}$, et soit $p \in [\![0; 2^{n+1}]\!]$ et $x, y \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{p}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{p}{2^{n+1}}\right)y\right) &= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{p}{2^n}x + \left(\frac{2^n - p}{2^n}\right)y + \frac{2^n}{2^n}y\right)\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{p}{2^n}x + \left(1 - \frac{p}{2^n}\right)\right) + f(y)\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{p}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{p}{2^n}\right)f(y) + f(y)\right) \\ &\leq \frac{p}{2^{n+1}}f(x) + \left(1 - \frac{p}{2^{n+1}}\right)f(y) \end{aligned}$$

Par récurrence, l'hypothèse est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or pour tout réel $x, y \in \mathbb{R}$, pour tout $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, $\lambda \in [0; 1]$, il existe une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $p_n \to \lambda$. Par continuité de f, l'inégalité que l'on a montré converge vers $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$, d'où f convexe.

Solution 6

On utilise la définition d'une intégrale comme limite d'une somme de Riemann. Ainsi, soit $u_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$. Puisque f est continue, on a $u_n \to \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$. De plus, par convexité de g on a : $g(u_n) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g \circ f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ et en passant à la limite, on retrouve la question demandée.

Solution 7

1) On utilise la concavité du logarithme sur $\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$ et on passe à l'exponentielle.
2) On somme les n inégalités sur $a_i b_i$ avec le 1).
3) On applique le 2) à $\alpha_i = \frac{a_i}{(\sum_{j=1}^n a_j^p)^{\frac{1}{p}}}$ et $\beta_i = \frac{b_i}{(\sum_{j=1}^n b_j^q)^{\frac{1}{q}}}$, et on retrouve exactement notre inégalité en multipliant par les numérateurs.
4) $(a_i + b_i)^p = (a_i + b_i)^{p-1}a_i + (a_i + b_i)^{p-1}b_i$, donc on a :

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Or puisque $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a $q + p = qp$ et $pq - q = p$ et on a :

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \leq \left(\left(\sum_{i=1}^p a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^p b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum_{i=1}^p (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

Et on passe le deuxième terme du produit à gauche, ce qui donne le résultat.