Colle semaine 2

Pierre Le Scornet

24 septembre 2020

Exercice 0

1) Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

$$\int_0^1 \ln t dt, \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt, \int_0^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} dt$$

2) Même question.

$$\int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) dt, \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x - 1} dx, \int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln x}} dx$$

Exercice 1 - *

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ localement intégrable, et soit $I_n = \int_0^n f(x)dx$ que l'on suppose converger vers $I \in \mathbb{R}$. Est ce que :

1. si $\int_0^{+\infty} f$ converge alors elle converge vers I ?
2. si f est positive alors $\int_0^{+\infty} f$ converge.
3. si f est positive alors $\int_0^{+\infty} f^2$ converge.
4. si f est positive alors $lim_{+\infty} f = 0$.
5. si f admet une limite finie ou infinie en $+\infty$ alors $\int_0^{+\infty} f$ converge.
6. si f est dérivable et de dérivée bornée, alors $\int_0^{+\infty} f$ converge.

Exercice 2 - *

1) Démontrer la convergence de l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)dt$.
2) Exprimer les intégrales $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)dt$ et $J = \int_0^{\pi} \ln(\sin t)dt$ en fonction de I.
3) Exprimer $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t \cos t)dt$ en fonction de I, K
4) En déduire les valeurs de I, J, K, L

Exercice 3 - *

1) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue. Supposons que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge. Pour $(x_n)_n, (y_n)_n$ deux suites à termes positifs tendant vers $+\infty$, montrer que $\int_{x_n}^{y_n} f(t)dt$ tend vers 0.
2) En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-t\sin t}dt$ diverge.

Exercice 4 - **

Soit $0 < a < b$.
1) Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt$.
2) Soient $0 < x < y$. Montrer que

$$\int_x^y \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t}dt - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t}dt$$

3) Démontrer que pour tout $z > 0$,

$$e^{-bz}\ln\frac{b}{a} \leq \int_{az}^{bz} \frac{e^{-t}}{t}dt \leq e^{-az}\ln\frac{b}{a}$$

4) En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt = \ln\frac{b}{a}$.

Exercice 5 - **

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ $\mathcal{C}^1$ tel que tel que $\lim_{+\infty} \frac{f'}{f}$ est fini et strictement négatif. Alors, montrer que f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 6 - **

Donner un développement asymptotique à trois termes de $\int_1^x \frac{e^t}{t}dt$.

Solution 1

1. Vrai, par définition de la convergence d'une intégrale impropre.
2. Vrai, par l'inégalité $I_{\lfloor T\rfloor} = \int_0^{\lfloor T\rfloor} f \leq \int_0^T f \leq \int_0^{\lfloor T\rfloor+1} f = I_{\lfloor T\rfloor+1}$, et les deux côtés convergent vers la même limite quand $T \to +\infty$.
3. Faux, pour f une fonction à plateaux bien choisie. On va prendre f nulle en dehors des $]n - \frac{1}{n^2}; n + \frac{1}{n^2}[$, pour $n \geq 2$, et égale à $\sqrt{n}$ sur $]n - \frac{1}{n^2}; n + \frac{1}{n^2}[$. Alors l'intégrale de f va être de même nature que la série des $\frac{\sqrt{n}}{2n^2}$ qui converge, alors que l'intégrale de f^2 va être de même nature que la série des $\frac{1}{2n}$, qui diverge.
4. Faux avec le même exemple.
5. Vrai. D'abord, la limite ne peut être non nulle ou infinie, sinon I_n divergerait. Ensuite, puisque cette limite est nulle, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $T > n_0$, $0 \leq f(T) < \epsilon$
$$\begin{aligned}\left|\int_0^T f - I_{\lfloor T\rfloor}\right| &\leq \left|\int_{\lfloor T\rfloor}^T f\right| \\ &\leq \epsilon\end{aligned}$$
car $\lfloor T\rfloor \geq n_0$.
6. Faux (id, sin, etc)

Solution 2

1) L'impropreté de cette intégrale est en 0. Puisque $\sin t = t\phi(t)$ avec ϕ continue qui tend vers 1 en 0. Alors on a $\ln(\sin t) = \ln t + \ln(\phi(t))$, le premier étant intégrable en 0 et le second continu en 0.
2) Par le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$, on montre que $K = I$, et en séparant $]0; \pi[$ en deux intervalles $]0; \frac{\pi}{2}[$ et $]\frac{\pi}{2}; \pi[$, on montre que $J = 2I$.
3) $L = I + K$
4) Puisque $\sin t \cos t = \frac{\sin 2t}{2}$, on a aussi

$$\begin{aligned}L &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin 2t}{2}\right) dt \\ &= \int_0^{\pi} \ln\left(\frac{\sin x}{2}\right) \frac{1}{2} dx \\ &= \frac{J}{2} - \frac{\pi \ln 2}{2}\end{aligned}$$

Ainsi, on sait que $I = L - K = (\frac{J}{2} - \frac{\pi \ln 2}{2}) - I = -\frac{\pi \ln 2}{2}$.

Solution 3

1) On utilise la relation de Chasles : $\int_{x_n}^{y_n} f(t)dt = -\int_0^{x_n} f(t)dt + \int_0^{y_n} f(t)dt$ et ces deux termes tendent vers la même limite, donc l'intégrale $\int_{x_n}^{y_n} f(t)dt$ tend vers 0.
2) On pose $x_n = (2n+1)\pi$ et $y_n = (2n+2)\pi$. Alors pour tout $t \in [x_n; y_n]$, on a $-t\sin t \geq 0$, donc $e^{-t\sin t} \geq 1$. Ainsi, $\int_{x_n}^{y_n} e^{-t\sin t} dt \geq \pi > 0$ donc l'intégrale diverge par la contraposée du 1).

Solution 4

1) En $+\infty$ c'est évident, et en 0 on fait un développement limité en 0 des deux exponentielles.
2) On sépare les deux intégrales et on fait un changement de variable $u = at$ et $v = bt$ et on réarrange les intégrales.
3) Par croissance de l'exponentielle, on a $e^{-bz} \leq e^{-t} \leq e^{-az}$ pour $t \in [az; bz]$, et on intègre le $\frac{1}{t}$ restant.
4) On fixe y et on va faire tendre x vers 0. En utilisant les deux questions précédentes avec $z = x$, on a :

$$e^{-bx} \ln \frac{b}{a} - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt \leq e^{-at} \ln \frac{b}{a} - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

On fait tendre x vers 0 et on obtient $\int_0^y \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t} dt = \ln \frac{b}{a} - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t} dt$. On fait maintenant tendre y vers $+\infty$ et on utilise le 3) en $z = y$ et on obtient :

$$e^{-by} \ln \frac{b}{a} \leq \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq e^{-ay} \ln \frac{b}{a}$$

et les deux côtés tendent vers 0 quand y tend vers l'infini, ce qui nous donne le résultat demandé.

Solution 5

Notons a la limite, il existe donc $A > 0$ tel que pour tout $x > A$, $\frac{f'(x)}{f(x)} \leq \frac{a}{2}$. On peut intégrer cette inégalité, ainsi $\ln f(x) - \ln f(A) \leq (x - A)\frac{a}{2}$. En passant à l'exponentielle, on a $0 \leq f(x) \leq f(A)e^{\frac{a}{2}(x-A)}$ donc f est intégrable ($a < 0$) et tend vers 0 en $+\infty$. On en déduit que f' est négatif à partir d'un certain $B > 0$. Pour $x \geq B$, on a donc $\int_B^x |f'(t)|\, dt = -\int_B^x f'(t)dt = f(B) - f(x)$ qui converge car f tend vers 0, donc f' est intégrable.

Solution 6

On va faire des intégrations par parties successives :

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{e^t}{t} dt &= \left[\frac{e^t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt \\ &= \frac{e^x}{x} - e + \left[\frac{e^t}{t^2}\right]_1^x + 2\int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + 2\int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt\end{aligned}$$

On va étudier le terme en $\int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt$, en l'intégrant par parties.

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt = \frac{e^x}{x^3} - e + 3\int_1^x \frac{e^t}{t^4} dt$$

Par intégration des relations de comparaison, avec $\frac{e^t}{t^4}$ qui diverge et qui est un $o\left(\frac{e^t}{t^3}\right)$, on obtient $\int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt \equiv \frac{e^x}{x^3}$, i.e. $\int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt = \frac{e^x}{x^3} + o\left(\frac{e^x}{x^3}\right)$, ce qui nous donne :

$$\int_1^x \frac{e^t}{t} dt = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} + 2\frac{e^x}{x^3} + o\left(\frac{e^x}{x^3}\right)$$