

# Colle semaine 4 MP

Pierre Le Scornet

9 octobre 2020

## Exercice 1 - \*

- 1) Montrer que les sous-ensembles des matrices symétriques et antisymétriques sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
- 2) Déterminer une base de ces sous-espaces pour  $n = 3$ , et la généraliser à une dimension quelconque.
- 3) En déduire que ces deux sous-espaces sont en somme directe, et que leur somme est l'espace tout entier.

## Exercice 2 - \*

Soient :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} c & 3c+d \\ -c & -2c+d \end{pmatrix}, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Montrer que  $F$  est un espace vectoriel. Montrer que  $F \oplus G = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

## Exercice 3 - \*

Soit  $\mathcal{E}$  le sous-ensemble de l'espace des suites réelles vérifiant la relation de récurrence  $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$ .

- 1) Montrer que  $\mathcal{E}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .
- 2) Montrer que les suites  $a_n = (-1)^n$  et  $b_n = 2^n$  forment une famille libre de  $\mathcal{E}$ .
- 3) En déduire que cette famille forme une base.
- 4) Déterminer la suite de  $\mathcal{E}$  telle que  $u_0 = 1$ ,  $u_n = -2$ .

## Exercice 4 - \*\*

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $u, v$  deux endomorphismes de  $E$ .

- 1) Démontrer que si  $u \circ v = v \circ u$ , alors  $\text{Im}(u)$  et  $\text{ker } u$  sont stables par  $v$ . La réciproque est-elle vraie?
- 2) Supposons que  $u$  est un projecteur. Montrer que  $u \circ v = v \circ u$  si et seulement si  $\text{ker } u$  et  $\text{Im}(u)$  sont stables par  $v$ .

## Exercice 5 - \*\*

On pose  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ .

- 1) Déterminer les valeurs propres de  $A$ .
- 2) Déterminer toutes les matrices qui commutent avec  $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ . En déduire que les matrices qui commutent avec  $A$  sont  $\text{Vect}(I_2, A)$ .

## Exercice 6 - \*\*

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 10 & -4 \\ -8 & 16 & -6 \end{pmatrix}$ .

- 1) Trouver un polynôme  $P$  unitaire de degré 2 tel que  $P(A) = 0$ .
- 2) En déduire que  $A$  est inversible.
- 3) Pour tout entier  $n$ , déterminer le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $P$ .
- 4) En déduire  $A^n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## Exercice 7 - Bonus

1) Pour un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  et un endomorphisme  $u$  tel que  $u^2$  a une valeur propre  $\mu > 0$ , montrer que  $\sqrt{\mu}$  ou  $-\sqrt{\mu}$  est valeur propre de  $u$ .  
2) Dans l'espace vectoriel réel  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ , déterminer les valeurs propres et espaces propres de l'opérateur  $u : f \mapsto x.f'$ .

### Solution 1

1) Les sommes et multiplications par un scalaire d'une matrice (anti)symétrique préserve leurs caractères (anti)symétriques, et avec le fait que 0 est symétrique et antisymétrique, ces deux sous-ensembles sont des sous-espaces vectoriels.  
2) Dans le cas général : pour le sous-espace symétrique, on sait que dans la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , pour  $1 \leq i < j \leq n$ , le coefficient en  $E_{ij}$  est égal au coefficient en  $E_{ji}$ . Ainsi, la famille  $\{E_{ii}, i \in \llbracket 1; n \rrbracket\} \sqcup \{E_{ij} + E_{ji}, 1 \leq i < j \leq n\}$  est génératrice de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ , mais aussi libre, donc c'est une base de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . De même, pour les matrices antisymétriques, leurs diagonales sont nulles et les coefficients en  $E_{ij}$  sont égaux aux opposés des coefficients en  $E_{ji}$ . Ainsi, la famille  $\{E_{ij} - E_{ji}, 1 \leq i < j \leq n\}$  génère  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ , et elle est libre, donc c'est une base.  
3) D'une part :  $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$ , et d'autre part,  $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$ . Ainsi, la somme des deux dimensions de ces sous-espaces vectoriels est  $n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . De plus, si une matrice  $M$  est symétrique et antisymétrique, alors  ${}^t M = M = -{}^t M$ , donc  ${}^t M = 0$ , donc  $M = 0$ . Ainsi,  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$ , et par égalité des dimensions,  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

### Solution 2

On vérifie trivialement que  $F$  contient 0, et qu'il est stable par somme et multiplication par un scalaire. De même,  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Ensuite, il suffit de remarquer que  $F$  et  $G$  sont de dimension 2, par exemple en montrant une base

de chacun :  $\left( \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$  pour  $F$  et  $\left( \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right)$ . Enfin, si  $M \in F \cap G$ , alors on a  $a = c = b$ , donc  $d = 3a$ , et enfin  $-a = -2a + 3a$ , donc  $a = 3a$  et donc  $a = b = c = d = 0$ . Ainsi,  $F \cap G = \{0\}$  et par égalité des dimensions  $F \oplus G = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

### Solution 3

1) On applique directement les critères des sous-espaces vectoriels.  
2) On vérifie d'une part qu'elles appartiennent bien à  $\mathcal{E}$ , et d'autre part que  $a_n$  n'est pas égale à une constante fois  $b_n$ . Ainsi, la famille est libre.  
3) Il suffit de montrer qu'il existe une famille génératrice de taille 2. Pour cela, il suffit de remarquer que  $u_n$  est entièrement définie pour tout  $n$  par  $u_0$  et  $u_1$ . Alors, par linéarité, les deux suites définies par notre relation de récurrences et  $(u_0, u_1) = (1, 0)$  et  $(u_0, u_1) = (0, 1)$  sont bien dans  $\mathcal{E}$  et génèrent  $\mathcal{E}$  entier. On a donc  $\dim(\mathcal{E}) = 2$  et la famille libre du 2) est une base.  
4) On a donc  $u_0 = \lambda a_0 + \mu v_0 = \lambda + \mu$ , et  $u_1 = \lambda a_1 + \mu b_1 = -\lambda + 2\mu$ , avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . On résout donc un système linéaire à deux équations et deux inconnues :  $1 = \lambda + \mu$  et  $-2 = -\lambda + 2\mu$ , dont la solution est  $\mu = -\frac{1}{3}, \lambda = \frac{4}{3}$ .

### Solution 4

1) Soit  $y \in \text{Im}(u)$ , et  $x \in E$  tel que  $u(x) = y$ . On a donc  $v(y) = v(u(x)) = u(v(x)) \in \text{Im}(u)$ . Soit  $x \in \ker u$ . On a alors  $u(v(x)) = v(u(x)) = v(0) = 0$ , i.e.  $v(x) \in \ker u$ . La réciproque n'est pas vraie en général, par exemple deux automorphismes :  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  ne commutent pas.  
2) On va montrer le sens réciproque. Pour  $u$  un projecteur, on a  $E = \ker u \oplus \text{Im}(u)$ . Or ces deux sous-espaces sont stables par  $v$ , et  $u$  est nulle sur l'un, et l'identité sur l'autre, qui commutent tout les deux avec  $v$ . On a donc  $u \circ v = v \circ u$ .

## Solution 5

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2(2^n - 1) & 1 - 2^n \\ 4(1 - 2^n) & 9 \cdot 2^n - 8 & 4(1 - 2^n) \\ 8(1 - 2^n) & 16(2^n - 1) & -7 \cdot 2^n + 8 \end{pmatrix}.$$

1) Pour ce genre de matrices, les valeurs propres sont toujours simples (ou alors on utilise des outils plus évolués comme le calcul du polynôme caractéristique). Là, il suffit de tâtonner, et on va trouver 3 et  $-2$ . On en a trouvé deux pour une matrice  $2 \times 2$ , on les a donc tous trouvés.

2) On sait que si une matrice commute avec une autre, alors elle stabilise ses sous-espaces propres.

Ici, elle stabilise  $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$  et  $\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ , et donc elle

est de la forme  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ , avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , ce qui

nous donne un sous-espace de dimension 2. Or  $A = PBP^{-1}$ , avec  $P$  la matrice de passage de  $A$  à  $B$ . Alors  $A$  commute avec  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  ssi  $AM = MA$  ssi  $PBP^{-1}M = MPBP^{-1}$  ssi  $P^{-1}MP$  commute avec  $B$ . Ainsi, l'espace des matrices commutant avec  $A$  est la même que l'espace des matrices commutant avec  $B$ , i.e. 2. Or  $I_2$  et  $A$  commutent avec  $A$ , ne sont pas linéairement dépendants, donc ils forment une base de l'espace des matrices commutant avec  $A$ .

## Solution 6

1) On commence par calculer  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ -12 & 28 & -12 \\ -24 & 48 & -20 \end{pmatrix}$ . Alors, on remarque

que  $A^2 = 3A - 2I_2$ , donc  $P(A) = 0$  avec  $P = X^2 - 3X + 2$ .

2) On a  $A^2 - 3A + 2I_3 = 0$ , donc  $A(3I_3 - A) = I_3$  et  $A$  est inversible, d'inverse  $3I_3 - A$ .

3) Il existe  $Q_n \in \mathbb{R}[X]$  et  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$  tels que  $X^n = PQ_n + a_nX + b_n = (X - 1)(X - 2)Q_n + a_nX + b_n$ . En évaluant cette expression en 1 et 2, on obtient  $1^n = a_n + b_n$ ,  $2^n = 2a_n + b_n$ , donc  $a_n = 2^n - 1$  et  $b_n = 2 - 2^n$ . Ainsi, le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $P$  est  $(2^n - 1)X + 2 - 2^n$ .

4) On a donc  $A^n = P(A)Q(A) + (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3 = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3$  donc