# Colle semaine 5 MP

Pierre Le Scornet

13 octobre 2020

## Exercice 1 - *

Montrer si les endomorphismes suivant sont diagonalisables ou non :
1) $D_n : P \in \mathbb{K}_n[X] \mapsto P'$
2) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & A + tr(A)I_n \end{array} \right.$

## Exercice 2 - *

La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une matrice $P$ le diagonalisant.

## Exercice 3 - *

Soient $f, g \in E^*$ non nulles, avec $E$ un espace vectoriel de dimension finie.
1) Montrer qu'il existe $x \in E$ tels que $f(x) \neq 0$ et $f(y) \neq 0$.
2) Supposons qu'il existe $p$ formes linéaires $\phi_1 \dots \phi_p \in E^*$ telles que, $\forall x \in E, \phi_1(x) = \dots = \phi_p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Montrer que $p \geq dim(E)$.

## Exercice 4 - **

Soient $\phi_1 \dots \phi_k$ et $\phi$ des formes linéaires de $E^*$. Montrer que

$$\phi \in Vect(\phi_1 \dots \phi_k) \Longleftrightarrow \bigcap_{i=1}^{k} \ker(\phi_i) \subset \ker \phi$$

Pour le sens réciproque, on utilisera les notations $F^o = \{x \in E, f(x) = 0 \ \forall f \in F\}$ et $G^\perp = \{f \in E^*, f(x) = 0 \ \forall x \in G\}$ pour $F$ un sous-espace vectoriel de $E^*$ et $G$ sev de $E$. On pourra aussi utiliser sans démonstration que $(F^o)^\perp = F$ en dimension finie, et que l'application de $^o$ et $^\perp$ inverse le sens des inclusions.

## Exercice 5 - **

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$, et notons $B = P(A)$.
1) Montrer que si $x$ est un vecteur propre de $A$ associé à $\lambda \in sp(A)$, alors $x$ est un vecteur propre de $B$ pour la valeur propre $P(\lambda)$.
2) Le but maintenant est de montrer que toutes les valeurs propres de $B$ sont de cette forme. Soit $\mu \in \mathbb{C}$. Décomposons le polynôme $P(X) - \mu$ en produit de facteurs irréductibles $P(X) - \mu = a(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_r)$.
a) Montrer que $det(B - \mu I_n) = a^n det(A - \alpha_1 I_n) \dots det(A - \alpha_r I_n)$.
b) En déduire que si $\mu$ est valeur propre de $B$, alors il existe une valeur propre $\lambda$ de $A$ telle que $\mu = P(\lambda)$.
3) Montrer que $sp(B) = \{P(\lambda), \lambda \in sp(A)\}$.
4) Montrer que pour $Q = \prod_{\lambda \in sp(A)} (X - \lambda_i)$ et $C = Q(A)$, on a $sp(C) = \{0\}$, *Bonus : en déduire que $C$ est nilpotente.*

## Exercice 6 - **

Montrer le résultat suivant : soit $E$ un ensemble, et $f_1, \dots f_n : E \to \mathbb{K}$ des fonctions formant une famille libre dans $\mathcal{F}(E, \mathbb{K})$, alors il existe $(x_1, \dots x_n) \in E$ tels que la matrice $(f_i(x_j))_{i,j \in [\![1;n]\!]}$ est inversible.
a) Par récurrence sur $n$,
b) En considérant $F = Vect(f_1 \dots f_n)$, et si $x \in E$ on note $\tilde{x} : f \in F \mapsto f(x)$ une forme linéaire de $F$ vers $\mathbb{K}$, et en montrant qu'il existe $x_1, \dots x_n \in E$ tels que $(\tilde{x}_1, \dots \tilde{x}_n)$ forme une base de $F^*$, dual de $F$. *On utilisera le fait que l'annulateur d'une sous-partie de $F^*$, avec $F$ un espace vectoriel, on a $\Gamma^o = \{x \in F, \forall g \in \Gamma, g(x) = 0\}$, qui vérifie pour $\Gamma$ un sous-espace vectoriel de $F^*$ : $dim(\Gamma^o) = dim(F) - dim(\Gamma)$.*

## Solution 1

Pour $P$ non nul, on a $deg(P') < deg(P)$. Ainsi pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $P' = \lambda P \Rightarrow \lambda = 0$. On a donc $sp(D_n) \subset \{0\}$. Comme $\ker D_n = \mathbb{K}_0[X]$, les vecteurs propres sont donc tous constants et donc pour $n > 1$, il n'existe pas de base de vecteurs propres et la dérivée n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{K}_n[X]$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. S'il est vecteur propre de $f$ pour la valeur propre $\lambda$. On a alors $f(A) - A = tr(A) I_n$, i.e. $(\lambda - 1)A = tr(A) I_n$. On a donc deux cas :

- Si $\lambda = 1$, alors on a $f(A) = A \Leftrightarrow tr(A) = 0$. Le sous-espace propre associé à cette valeur propre est donc le noyau d'une forme linéaire, c'est donc un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Sinon, on a $A \in Vect(I_n)$. Or $f(I_n) = I_n + nI_n = (n+1)I_n$, on a donc $n+1$ valeur propre de $f$, de sous-espace propre $Vect(I_n)$.

On a donc par égalité des dimensions que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \ker Tr \oplus Vect(I_n)$, et donc en concaténant une base de $\ker Tr$ (qui seront des vecteurs propres pour la valeur propre 1) et $\{I_n\}$, on obtient une base de l'espace tout entier. $f$ est donc diagonalisable.

## Solution 2

Pour montrer que cette matrice est diagonalisable, on va calculer $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & -3 & -\lambda \end{vmatrix} = (X-1)(X-2)^2$. Ainsi, on a $sp(A) = \{1, 2\}$. On peut donc regarder $A - 2I_n = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ qui est de rang 1, donc son noyau est de dimension 2. Puisque la dimension du sous-espace propre associé à 1 est au moins 1, on peut donc créer une base de $\mathbb{K}^3$ en concaténant une base du premier sous-espace propre et un représentant non nul du deuxième, ce qui nous donne une base de vecteurs propres de $A$. $A$ est donc diagonalisable.

Pour la diagonaliser, on va donc chercher une base de vecteurs propres. Pour $\lambda = 1$, on a $A - I_n = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, et l'on remarque que $C_3 = C_1 + C_2$, donc $x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1. Pour $\lambda = 2$, on a $A - 2I_n = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ et on remarque que $C_1 = -C_3$ et $C_1 = -\frac{2}{3}C_2$, on a donc $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ (non colinéaires, donc base du sous-espace propre). On a donc $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$.

## Solution 3

1) Si $f, g$ sont colinéaires, alors puisqu'ils sont non nuls n'importe quel $x$ qui convient pour $f$ convient pour $g$. Sinon, on n'a ni $\ker f \subseteq \ker g$ ni $\ker g \subseteq \ker f$ donc on peut choisir $x \in \ker g \setminus \ker f$ et $y \in \ker f \setminus \ker g$. Alors on a $f(x+y) = f(x) \neq 0$ et $g(x+y) = g(y) \neq 0$.

2) On peut traduire l'hypothèse en $\ker \phi_1 \cap \cdots \cap \ker \phi_p = \{0\}$. Or intersecter d'un sous-espace vectoriel avec un hyperplan ne donne que deux résultats différents : soit la dimension est préservée (quand l'un est inclus dans l'autre) soit la dimension descend de 1 (car cela revient à un noyau d'une forme linéaire restreinte à ce sous-espace). Ainsi, par une récurrence immédiate, la dimension de notre intersection (c'est à dire 0) est supérieure ou égale à $dim(E) - p$, on a donc $p \geq dim(E)$.

## Solution 4

- Montrons le sens direct. Soit $\lambda_1 \dots \lambda_k \in \mathbb{K}$ tels que $\phi = \sum_{i=1}^{k} \lambda_k \phi_k$. Alors on a pour tout $x \in \cap_{i=1}^{k} \ker(\phi_i)$, $\phi(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \phi_i(x) = 0$, d'où $x \in \ker \phi$.
- Supposons que l'on a $\cap_{i=1}^{k} \ker(\phi_i) \subseteq \ker \phi$. Or, la première intersection est égale à l'ensemble des $x$ qui annule tous les $\phi_i$, donc qui annule toutes les formes linéaires de $Vect(\phi_1 \dots \phi_k)$, et le deuxième terme est égal à l'ensemble des vecteurs qui annule toutes les formes linéaires de $Vect(\phi)$. On a donc $Vect(\phi_1 \dots \phi_k)^o \subset Vect(\phi)^o$. Ainsi, on a $Vect(\phi) \subseteq Vect(\phi_1 \dots \phi_k)$

en passant l'inclusion au $^\perp$ et on a gagné.

## Solution 5

1) On a $P(A)x = \sum_{i=0}^{d} p_i A^i x = \sum_{i=0}^{d} p_i \lambda^i x = P(\lambda)x$.
2) a) Puisque $B - \mu I_n = P(A) - \mu I_n = (P - \mu)(A)$, on a donc $B - \mu I_n = (a(X - \alpha_1)\dots(X - \alpha_r))(A) = a(A - \alpha_1 I_n)\dots(A - \alpha_r I_n)$, donc par multiplicativité du déterminant (et par $n$-linéarité) $det(B - \mu I_n) = a^n det(A - \alpha_1 I_n)\dots det(A - \alpha_r I_n)$.
b) Soit $\mu$ valeur propre de $B$. Alors $det(B - \mu I_n) = 0$, et par le a) avec $a \neq 0$, il existe $\alpha_i$ tel que $det(A - \alpha_i I_n) = 0$ (car $\mathbb{K}$ est intègre). Ainsi, cet $\alpha_i$ est valeur propre de $A$. Or $P(\alpha_i) - \mu = 0$ par la décomposition de $P - \mu$ en facteurs irréductibles, $\lambda = \alpha_i$ convient.
3) L'inclusion vient du 2)b), et l'inclusion réciproque vient du 1).
4) Par le 3), on a donc $sp(C) = \{Q(\lambda), \lambda \in sp(A)\} = \{0\}$. J'ai mis la question suivante en bonus, puisqu'il faut savoir que les facteurs irréductibles du polynôme minimal de $A$ sont tous diviseurs de $Q$, donc pour $k$ assez grand ($n$ suffit), $\pi_A | Q^k$ et donc $C^k = 0$. Pour montrer que c'est vrai sans cela, il faut savoir que tout matrice est triangularisable dans $\mathbb{C}$, et la triangularisée de $C$ qu'on obtient aura des 0 sur la diagonale car les éléments diagonaux d'une matrice triangulaire sont exactement ses valeurs propres. Ainsi, elle est nilpotente car strictement triangulaire supérieure.

## Solution 6

a) Le cas $n = 1$ est évident, puisque une famille libre à un élément signifie qu'il est non nul.
Supposons que la propriété est vraie jusqu'au rang $n - 1$, et appliquons la à $f_1 \dots f_{n-1}$ pour obtenir une famille $x_1 \dots x_{n-1}$. On va définir :

$$\Delta : E \to \mathbb{K}, x \mapsto \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_1(x_{n-1} & f_1(x) \\ f_2(x_1) & \dots & f_2(x_{n-1} & f_2(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_n(x_1) & \dots & f_n(x_{n-1}) & f_n(x) \end{vmatrix}$$

et l'on va pouvoir noter $\Delta_i$ le mineur de coordonnées $(i, n)$ (le déterminant de la sous-matrice obtenue en retirant la ligne $i$ et la colonne $n$). Ainsi, on va pouvoir développer le déterminant sur la dernière colonne pour obtenir $\Delta(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i} \Delta_i f_i(x)$. Par définition des $x_1 \dots x_{n-1}$, on a $\Delta_n \neq 0$, et puisque la famille $(f_1, \dots f_n)$ est libre, il existe $x_n \in E$ tel que $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i} \Delta_i f_i(x) \neq 0$, et alors $(x_1, \dots x_n)$ convient.
b) Pour $x \in E$, $\tilde{x} \in F^*$. Soit donc $\Gamma = \{\tilde{x}, x \in E\}$. Alors on a $G^o = \Gamma^o = \{f \in F, \forall \tilde{x} \in \Gamma, \tilde{x}(f) = 0\} = \{f \in F, \forall x \in E, f(x) = 0\} = \{0\}$ avec $G = Vect(\Gamma)$. Ainsi, on a $dim(G) = n - dim(G^o) = n$, donc on a $dim(G) = dim(F) = dim(F^*)$, or $G \subseteq F^*$ donc $Vect(\Gamma) = G = F^*$. Ainsi, il existe une base $(\tilde{x}_1, \dots \tilde{x}_n)$ d'éléments de $\Gamma$ qui engendre $F^*$ tout entier, i.e. $(\tilde{x}_i(f_j))_{i,j \in [\![1;n]\!]} = (f_j(x_i))_{i,j \in [\![1;n]\!]}$ est inversible, et en passant à la transposée on a gagné.