Colle semaine 6 MP*

Pierre Le Scornet

6 novembre 2020

Cours 1

Montrer le théorème de Bolzano-Weiestrass en dimension finie.

Cours 2

Montrer la caractérisation des valeurs d'adhérence d'une suite par les suites extraites.

Cours 3

Montrer que deux normes sont équivalentes ssi toute suite convergente pour l'une est convergente de même limite pour l'autre.

Exercice 1 - *

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. On peut y définir trois normes : $\| \sum_{i=0}^{p} p_i X^i \|_1 = \sum_{i=0}^{p} |p_i|$, $\| \sum_{i=0}^{p} p_i X^i \|_2 = \left(\sum_{i=0}^{p} p_i^2 \right)^{1/2}$, $\| \sum_{i=0}^{p} p_i X^i \|_\infty = \max_{i=0}^{p} |p_i|$. Montrer qu'elles le sont. Sont-elles équivalentes deux-à-deux ?

Exercice 2 - *

Soit deux normes sur $E = \mathbb{R}[X]$ $N_1 : P \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} \left| P^{(k)}(0) \right|$ et $N_2 : P \mapsto \sup_{t \in [-1;1]} |P(t)|$.
1) Montrer que ce sont bien des normes.
2) Étudier la convergence de la suite $P_n = \frac{1}{n} X^n$ pour ces deux normes.
3) Sont-elles équivalentes ?

Exercice 3 - **

Soir $E = \mathcal{C}^1([0;1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose $N^2(f) = f^2(0) + \int_0^1 f'(t)^2 dt$.
1) Vérifier que N est une norme dérivée d'un produit scalaire.
2) Démontrer que pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2} N(f)$.
3) Ces deux normes sont-elles équivalentes ?

Exercice 4 - **

Montrer que pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5 - **

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = B$.
1) Montrer que B n'est pas inversible.
2) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $AB^k - B^k A = kB^k$. En déduire que B est nilpotente.

Exercice 6 - *

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
1) On suppose que $tr({}^tAA) = 0$. Que peut-on dire de la matrice A ?
2) On suppose que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $tr(AX) = tr(BX)$. Montrer que $A = B$.

Exercice 7 - Bonus

Montrer qu'une suite bornée dans un e.v.n. ayant une unique valeur d'adhérence converge.
Montrer que le rang caractérise la relation d'équivalence.

Solution 1

On peut remarquer que ces normes ressemblent à des normes de $\mathbb{R}^p$ sur $\|(p_i)_{1\leq i\leq p}\|_{1/2/\infty}$, et la démonstration est presque la même (juste en faisant attention aux degrés des sommes de polynômes). Pour montrer qu'elles ne sont pas équivalentes deux à deux, il va falloir trouver une suite de polynôme telle que leurs normes sont asymptotiquement différentes. Il faut que les degrés de cette suite diverge, sinon on reste dans un espace de dimension finie où les normes sont donc toutes équivalentes. On va prendre $\sum_{k=0} nX^k$, dont la norme 1 est n, sa norme 2 $\sqrt{n}$, et sa norme ∞ 1. Puisqu'elles sont asymptotiquement différentes, les normes ne peuvent pas être équivalentes.

Solution 2

1) On utilise l'inégalité triangulaire sur les valeurs absolues, et on somme/passe au sup. Pour N_2, on remarque qu'un polynôme qui s'annule sur un nombre infini de points est forcément nul.
2) $N_1(P_n) = \frac{n!}{n}$, donc P_n diverge pour N_1. $N_2(P_n) = \frac{1}{n}$ donc P_n converge vers 0.
3) Par contraposée de la caractérisation des normes équivalentes par les suites convergentes, elles ne sont donc pas équivalentes.

Solution 3

1) On vérifie que N est dérivée d'un produit scalaire $\phi(f, g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$. C'est bien une forme symétrique, positive, et le fait d'être définie positive vient du fait que $\phi(f, f) = 0 \Rightarrow$

$f(0) = 0 \wedge f' = 0 \Rightarrow f = 0$.
2) Puisque f est $\mathcal{C}^1$, on a $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$. On en déduit que $|f(x)| \leq |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|dt$, et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur l'intégrale, on obtient $\int_0^x |f'(t)|dt = (\int_0^1 |f'(t)|^2 dt)^{1/2} (\int_0^1 1^2)^{1/2}$ et donc $|f(x)| \leq |f(0)| + (\int_0^1 |f'(t)|^2 dt)^{1/2}$. On réutilise Cauchy-Schwarz sur les deux termes, et on obtient $|f(x)| \leq \left(f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt\right)^{1/2} (1^2 + 1^2)^{1/2}$, d'où $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2} N(f)$

Solution 4

On peut remarquer que si $A = PBP^{-1}$ avec $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On passe le P^{-1} de l'autre côté, et on obtient $AP = PB$. Or si l'on pose $Re = Re(P), Im = Im(P)$, on a donc en décomposant en partie réelle et partie imaginaire notre égalité $ReP = PRe$ et $ImP = PIm$. On ne sait pas si l'une de ces deux matrices est inversible (sinon on a gagné). Si les deux ne le sont pas, on a quand même $(Re + xIm)P = P(Re + xIm)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si l'on note $Q(x) = det(Re + xIm)$, Q est un polynôme à coefficient réels en x et on sait que Q est non nul puisque $Q(i) = detP \neq 0$. Ainsi, Q admet une infinité de valeurs x telles que $Q(x) \neq 0$, et alors $Re + xIm$ est inversible et l'on a gagné.

Solution 5

1) On va raisonner par l'absurde. Supposons que B est inversible. Alors $tr(B^{-1}AB - A) = tr(I_n) \Rightarrow 0 = n$, d'où une contradiction (la trace est préservée par la conjugaison).
2) On va le montrer par récurrence, sachant que l'on connaît le cas $n = 1$. Supposons que l'on a $AB^k - B^kA = kB^k$. Alors, $AB^{k+1} - B^{k+1}A = (AB^k - B^kA)B + B(AB^k - B^kA) + B^kAB - BAB^k = 2kB^{k+1} + B(B^{k-1}A - AB^{k-1})B = 2kB^{k+1}(k-1)B^{k+1} = (k+1)B^{k+1}$. D'où la relation par récurrence. On a donc $tr(B^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donc B est nilpotente (pour montrer ça, on peut trigonaliser B dans $\mathbb{C}$ et la trace sera la somme des valeurs propres avec multiplicité puissance k et sera nulle. On peut donc remplacer par linéarité les λ_i^k par n'importe quel $P(\lambda_i)$ et en choisissant bien P avec un polynôme d'interpolation, on a $\lambda_i = 0$ donc toutes le spectre de B est $\{0\}$ et on a fini).

Solution 6

1) On peut calculer les coefficients diagonaux de $C =^t AA$: cela nous donne $c_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ij}.a_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$. On a donc $tr(^tAA) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{ij}^2$. On a donc une somme de termes positifs : si elle est nulle, alors tous ces termes sont nuls. Ainsi, $A = 0$.
2) On va appliquer cette égalité aux matrices E^{kl} de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a alors $tr(AE^{kl}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} e_{ji}^{kl} = a_{lk} = b_{lk} = tr(BE^{kl})$ pour tous $k, l \in [\![1; n]\!]$, donc $A = B$.

Solution 7

On montre directement que toutes les sous-suites convergentes convergent vers la même limite. Ensuite, on va écrire la définition de la divergence : $\exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - l| > \epsilon$. Ainsi, on peut construire par récurrence une sous-suite de u telle que $|u_{\phi(n)} - l| > \epsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc cette suite n'a pas l comme valeur d'adhérence. Or elle en possède une par le théorème de

Bolzano-Weierstrass, donc on a une absurdité.

Pour la deuxième, voici une idée de la preuve : on va montrer que toute matrice de rang r est équivalente à une matrice de même taille avec r 1 sur la diagonale en haut à gauche (et des 0 partout ailleurs). Pour cela, il suffit de prendre comme base de départ une famille dont les $(n-r)$ derniers vecteurs forment une base du noyau de A (qui existe avec le théorème de la base incomplète) et comme base d'arrivée une famille avec les r images des r premiers vecteurs de la bases, complétée à droite.