Exercice 1 - *

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\chi_M = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i X^i$.
1) Montrer que $c_{n-1} = Tr(M)$.
2) En déduire que si M a n valeurs propres distinctes, alors $Tr(M) = \sum_{\lambda \in sp(M)} \lambda$.

Exercice 2 - *

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}$.
1) Donner le domaine de définition de f (dans $\mathbb{R}$).
2) Déterminer la continuité éventuelle de f en $]1;+\infty[$. Déterminer ses limites en 1 et $+\infty$. (*on utilisera les critères de majoration des séries alternées et de leurs restes*)

Exercice 3 - *

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n(x) = nx^2 e^{-\sqrt{n}x}$.
1) Montrer que la série converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2) Montrer qu'elle ne converge pas normalement.
3) Converge-t-elle normalement sur tout intervalle de la forme $[a;+\infty[, a > 0$?
4) Montrer qu'elle ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 4 - **

Soit $P = X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$, et $M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que le polynôme caractéristique de ce polynôme est égal à P.

Exercice 5 - **

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(R)$, avec R un anneau commutatif unitaire. On étend naturellement les définitions des matrices/polynômes caractéristiques sur cet espace.
1) Supposons que A et B soient inversibles. Montrer alors que AB et BA ont le même polynôme caractéristique (*indication : montrer qu'ils sont semblables*).
2) Dans le cas où $R = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que ce résultat reste vrai sans l'hypothèse d'inversibilité (on utilisera la densité de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *bonus : le montrer*).
3) Étendre ce résultat au cas où R est un corps (*indication : on supposera admis que deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang*).

Exercice 6 - **

Soit $\zeta : x \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$.
1) Déterminer le domaine de définition de cette somme.
2) Montrer qu'elle y est décroissante et continue.

3) Déterminer la limite de ζ en $+\infty$.
4) Montrer l'inégalité :

$$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^s} dx \leq \frac{1}{k^s}$$

En déduire un équivalent de ζ en 1^+.
5) Montrer que la fonction ζ est convexe.
6) Tracer la courbe de la fonction ζ.

Exercice 7 - bonus

Supposons que f est la limite uniforme de polynômes sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est un polynôme.
Montrer que si deux matrices réelles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors elles le sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution 1

1) C'est du cours : il suffit d'écrire quels peuvent être les termes de la somme définissant le déterminant de degré $n-1$.
2) Si M a n valeurs propres distinctes, alors χ_M est divisible par tous les $X-\lambda, \lambda \in sp(M)$ et est de degré n et unitaire, donc $\chi_M = \prod_{i=1}^n (X-\lambda_i)$, et donc $Tr(M) = (\chi_M)_{n-1} = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Solution 2

1) Pour que le ln soit défini, on va donc prendre $x > 0$, et pour que la fraction existe $\forall n \in \mathbb{N}, xn \neq 1$, i.e. $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{\frac{1}{p}, p \in \mathbb{N}^*\}$. Dans ce cas, par le critère de convergence des séries alternées, on a la convergence simple sur cet ensemble.
2) Par décroissance de $\frac{1}{\ln(nx)}$ selon n, et par la majoration des séries alternées, on a pour $x > 1$ $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\ln x}$, et on $\lim_{+\infty} f = 0$.
Pour la continuité, on sait que chaque terme est continu en x sur $]1; +\infty[$, et par le critère de majoration des restes des séries alternées on a $\|R_n\|_{\infty,]1;+\infty[} \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$. Ainsi, on a la convergence uniforme du reste vers 0 et donc la convergence uniforme de la série de fonctions. Ainsi la somme est continue.
Pour la limite en 1^+, on va utiliser le théorème d'interversion des limites puisqu'on a la convergence uniforme de la série de fonctions. Ainsi, la limite en 1^+ est égale à la somme des limites, mais en $n = 1$ cette limite est $+\infty$ (et tous les termes sont positifs) donc la limite de f en 1 est $+\infty$.

Solution 3

1) La convergence simple se déduit naturellement pour $x > 0$ de $3\ln(n) \leq \sqrt{n}$ à partir d'un certain rang, et donc que $u_n(x) = O(x^2/n^2)$. Pour $x = 0$, c'est la série à termes nulles qui converge.
2) On prend $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, et l'on obtient $u_n(x_n) = e^{-1}$, d'où $\|u_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \geq e^{-1}$.
3) On va écrire $u_n(x) = g(\sqrt{n}x)$, avec $g : y \mapsto y^2 e^{-y}$. On peut calculer sa dérivée : $g'(y) = (2y - y^2)e^{-y}$ et on peut rapidement montrer qu'elle est décroissante à partir de $y = 2$, i.e. u_n est décroissante à partir de $\frac{2}{\sqrt{n}}$. Ainsi, pour $n \geq \frac{4}{a^2}$, on a $a \geq \frac{2}{\sqrt{n}}$ et donc $0 \leq u_n(x) \leq u_n(a)$ par décroissance de u_n à partir de $\frac{2}{\sqrt{n}}$. Or $u_n(a)$ est le terme d'une série convergente, donc la série des u_n converge normalement sur $[a; +\infty[$.
4) On va montrer que le reste ne converge pas uniformément. D'une part, on sait que $R_n(x) = \sum_{n+1}^{+\infty} u_n(x) \geq u_{n+1}(x)$. Or par la question 2), on sait que la norme infinie de u_n est supérieure ou égale à e^{-1} donc le reste ne converge pas uniformément vers 0.

Solution 4

Puisque le déterminant est une forme n-linéaire, on peut faire des opérations sur les lignes de $\chi_M(X) = M = \begin{vmatrix} X & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ -1 & X & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & X & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & -1 & X - a_{n-1} \end{vmatrix}$. On utilise les opérations sur les lignes, qui préservent le déterminant : on ajoute $\sum_{i=}^{n-1} X^k L_k$, avec L_k la $k$ième ligne. On obtient alors $\chi_M(X) = M = \begin{vmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -P(X) \\ -1 & X & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & X & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & -1 & X - a_{n-1} \end{vmatrix}$. En développant le déterminant sur la première ligne, on obtient $\chi_M(X) = (-1)^n(-1)^{n-1} - P(X) = P(X)$.

Solution 5

1) On a $BA = B(AB)B^{-1}$. Ainsi, AB et BA ont le même polynôme caractéristique, donc sont semblables. Ainsi, elles ont le même polynôme caractéristique. On remarque qu'il suffit que l'une des deux matrices soit inversible pour avoir le résultat.
2) Dans ce cas, on a pour A fixé le $k$ième coefficient du polynôme caractéristique de AB et de BA fonction continue en B. Ainsi, puisque $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que les deux fonctions à valeurs réelles sont égales sur $GL_n(\mathbb{R})$, alors par continuité elles sont égales sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour le montrer, il suffit de montrer que la suite de matrices $A_n = A + \frac{1}{n} I_n$ est inversible à partir d'un certain rang (sinon, le polynôme caractéristique aurait une infinité de racines, ce qui est impossible puisqu'il n'est pas nul).
3) D'abord, on note $r = rg(A)$. Alors A est équivalent à $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$, il existe P, Q inversibles tels que $A' = Q^{-1}AP$. On va noter $B' = P^{-1}BQ$. Alors on a $A'B' = Q^{-1}ABQ$, donc $A'B'$ et AB sont semblables et ont le même polynôme caractéristique, et on a la même chose pour $B'A' = P^{-1}BAP$ et BA. On va donc calculer le produit par bloc de $A'B'$ et de $B'A'$:

$$\begin{aligned} A'B' &= \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ B'A' &= \begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C & 0 \\ E & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, ces deux produits ont le même polynôme caractéristique, donc AB et BA on le même polynôme caractéristique.

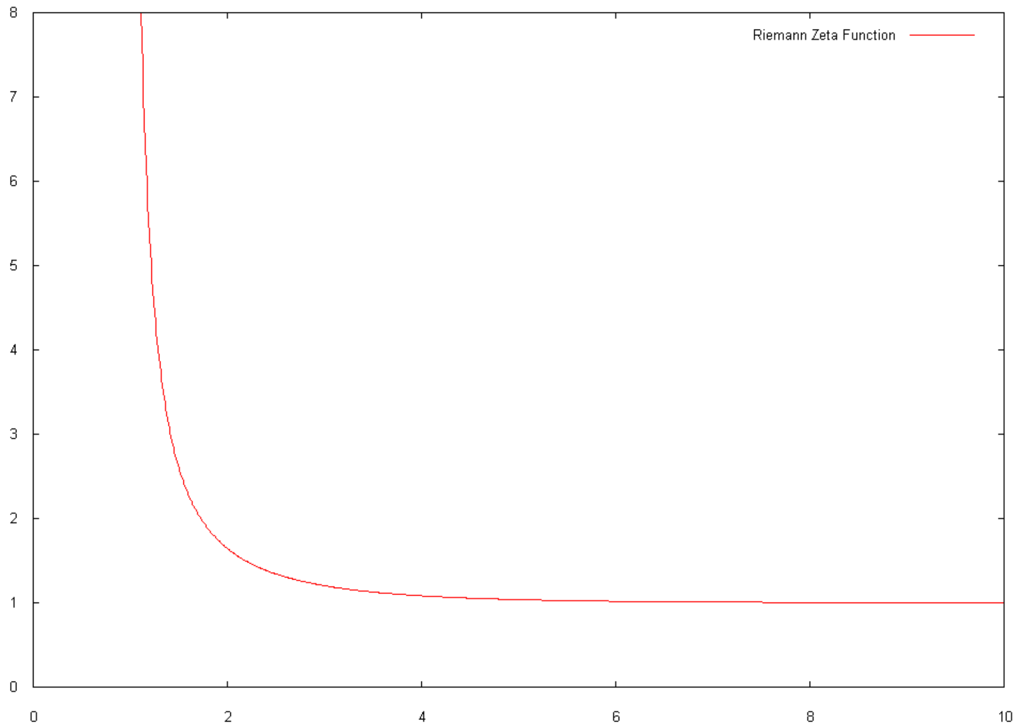

FIGURE 1 – Fonction ζ

Solution 6

1) C'est une série de Riemann. Ainsi, le domaine de définition de ζ est $]1;+\infty[$.
2) Chaque terme de la somme est décroissant, donc ζ est décroissante. Pour montrer la continuité, on remarque que chaque terme est continu et on va montrer que la série converge localement uniformément. Sur $[a;+\infty[, a>1$, par décroissance on a $\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^a}$, dont la série converge. Ainsi, on a la convergence localement uniforme, donc la continuité de la fonction ζ.
3) On sait que la série converge uniformément sur $[2;+\infty[$. Or chaque terme converge vers 0 en $+\infty$ (sauf le premier qui est constant égal à 1), on peut appliquer le théorème d'interversion des limites ce qui nous donne $\lim_{+\infty} \zeta = 1$.
4) Cette inégalité s'obtient par la décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x^s}$, et en l'intégrant entre k et $k+1$. En la sommant de $k=1$ à $+\infty$, on obtient que $\zeta(s) - 1 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^s} dx = \frac{1}{s-1} \leq \zeta(s)$, et donc $\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}$. Les deux côtés de cet encadrement sont équivalents à $\frac{1}{s-1}$, donc la fonction ζ aussi.
5) La fonction $s \mapsto \frac{1}{n^s}$ est convexe. Si l'on regarde la définition de la convexité, on peut la sommer et la passer à la limite, donc la fonction ζ est convexe. Sinon, on peut montrer que ζ est $\mathcal{C}^2$, en déduire que la dérivée seconde est la somme des dérivées secondes, qui sont toutes positives donc la fonction est convexe.
6)