Colle semaine 7 MP*

Pierre Le Scornet

19 novembre 2020

Cours 1

Montrer que si u et v deux endomorphismes commutent, alors tout sous-espace propre de u est stable par v.

Cours 2

Montrer qu'une matrice est diagonalisable ssi l'espace ambiant est somme directe de ses sous-espaces propres.

Cours 3

Montrer qu'un endomorphisme est trigonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé.

Exercice 1 - *

Montrer si les endomorphismes suivant sont diagonalisables ou non :
1) $D_n : P \in \mathbb{K}_n[X] \mapsto P'$
2) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & A + tr(A) I_n \end{array} \right.$

Exercice 2 - *

La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une matrice P le diagonalisant.

Exercice 3 - *

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Est-elle trigonalisable ? Si oui, en proposer une trigonalisation.

Exercice 4 - **

Soit $P = X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$, et $M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que le polynôme caractéristique de ce polynôme est égal à P.

Exercice 5 - **

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(R)$, avec R un anneau commutatif unitaire. On étend naturellement les définitions des matrices/polynômes caractéristiques sur cet espace.
1) Supposons que A et B soient inversibles. Montrer alors que AB et BA ont le même polynôme caractéristique (*indication : montrer qu'ils sont semblables*).
2) Dans le cas où $R = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que ce résultat reste vrai sans l'hypothèse d'inversibilité (on utilisera la densité de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *bonus : le montrer*).
3) Étendre ce résultat au cas où R est un corps (*indication : on supposera admis que deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang*).

Exercice 6 - **

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$, et notons $B = P(A)$.
1) Montrer que si x est un vecteur propre de A associé à $\lambda \in sp(A)$, alors x est un vecteur propre de B pour la valeur propre $P(\lambda)$.
2) Le but maintenant est de montrer que toutes les valeurs propres de B sont de cette forme. Soit $\mu \in \mathbb{C}$. Décomposons le polynôme $P(X) - \mu$ en produit de facteurs irréductibles $P(X) - \mu = a(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_r)$.
a) Montrer que $det(B - \mu I_n) = a^n det(A - \alpha_1 I_n) \dots det(A - \alpha_r I_n)$.
b) En déduire que si μ est valeur propre de B, alors il existe une valeur propre λ de A telle que $\mu = P(\lambda)$.
3) Montrer que $sp(B) = \{P(\lambda), \lambda \in sp(A)\}$.
4) Montrer que pour $Q = \prod_{\lambda \in sp(A)}(X - \lambda_i)$ et $C = Q(A)$, on a $sp(C) = \{0\}$, *Bonus : en déduire que C est nilpotente.*

Solution 1

Pour P non nul, on a $deg(P') < deg(P)$. Ainsi pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $P' = \lambda P \Rightarrow \lambda = 0$. On a donc $sp(D_n) \subset \{0\}$. Comme $\ker D_n = \mathbb{K}_0[X]$, les vecteurs propres sont donc tous constants et donc pour $n > 1$, il n'existe pas de base de vecteurs propres et la dérivée n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{K}_n[X]$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. S'il est vecteur propre de f pour la valeur propre λ. On a alors $f(A) - A = tr(A)I_n$, i.e. $(\lambda - 1)A = tr(A)I_n$. On a donc deux cas :

- Si $\lambda = 1$, alors on a $f(A) = A \Leftrightarrow tr(A) = 0$. Le sous-espace propre associé à cette valeur propre est donc le noyau d'une forme linéaire, c'est donc un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Sinon, on a $A \in Vect(I_n)$. Or $f(I_n) = I_n + nI_n = (n+1)I_n$, on a donc $n+1$ valeur propre de f, de sous-espace propre $Vect(I_n)$.

On a donc par égalité des dimensions que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \ker Tr \oplus Vect(I_n)$, et donc en concaténant une base de $\ker Tr$ (qui seront des vecteurs propres pour la valeur propre 1) et $\{I_n\}$, on obtient une base de l'espace tout entier. f est donc diagonalisable.

Solution 2

Pour montrer que cette matrice est diagonalisable, on va calculer $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & -3 & -\lambda \end{vmatrix} = (X-1)(X-2)^2$. Ainsi, on a $sp(A) = \{1, 2\}$. On peut donc regarder $A - 2I_n = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ qui est de rang 1, donc son noyau est de dimension 2. Puisque la dimension du sous-espace propre associé à 1 est au moins 1, on peut donc créer une base de $\mathbb{K}^3$ en concaténant une base du premier sous-espace propre et un représentant non nul du deuxième, ce qui nous donne une base de vecteurs propres de A. A est donc diagonalisable.
Pour la diagonaliser, on va donc chercher une base de vecteurs propres. Pour $\lambda = 1$, on a $A - I_n = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, et l'on remarque que $C_3 = C_1 + C_2$, donc $x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1. Pour $\lambda = 2$, on a $A - 2I_n = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ et on remarque que $C_1 = -C_3$ et $C_1 = -\frac{2}{3}C_2$, on a donc $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ (non colinéaires, donc base du sous-espace propre). On a donc $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$.

Solution 3

On va calculer le polynôme caractéristique de A : $\chi_A = (X-1)(X(X-2)+1) = (X-1)^3$. Ainsi, on va chercher à déterminer le sous-espace propre de la valeur propre 1 : $(x, y, z) \in \ker(A - I_3) \Leftrightarrow (y, z) = (-z, y + 2z) \Leftrightarrow y + z = 0$. Ainsi, ce sous-espace est de dimension 2 et on a une base de deux vecteurs propres : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Enfin, on prend un autre vecteur pour compléter la base et dans cette base, la matrice de A est triangulaire supérieure. On peut par exemple essayer de la trigonaliser en $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution 4

Puisque le déterminant est une forme n-linéaire, on peut faire des opérations sur les lignes de $\chi_M(X) = M = \begin{vmatrix} X & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ -1 & X & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & X & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & -1 & X-a_{n-1} \end{vmatrix}$. On utilise les opérations sur les lignes, qui préservent le déterminant : on ajoute $\sum_{i=}^{n-1} X^k L_k$, avec L_k la $k$ième ligne. On obtient alors $\chi_M(X) = M = \begin{vmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -P(X) \\ -1 & X & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & X & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & -1 & X-a_{n-1} \end{vmatrix}$. En développant le déterminant sur la première ligne, on obtient $\chi_M(X) = (-1)^n(-1)^{n-1} - P(X) = P(X)$.

Solution 5

1) On a $BA = B(AB)B^{-1}$. Ainsi, AB et BA ont le même polynôme caractéristique, donc sont semblables. Ainsi, elles ont le même polynôme caractéristique. On remarque qu'il suffit que l'une des deux matrices soit inversible pour avoir le résultat.
2) Dans ce cas, on a pour A fixé le $k$ième coefficient du polynôme caractéristique de AB et de BA fonction continue en B. Ainsi, puisque $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que les deux fonctions à valeurs réelles sont égales sur $GL_n(\mathbb{R})$, alors par continuité elles sont égales sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour le montrer, il suffit de montrer que la suite de matrices $A_n = A + \frac{1}{n} I_n$ est inversible à partir d'un certain rang (sinon, le polynôme caractéristique aurait une infinité de racines, ce qui est impossible puisqu'il n'est pas nul).
3) D'abord, on note $r = rg(A)$. Alors A est équivalent à $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$, il existe P, Q inversibles tels que $A' = Q^{-1}AP$. On va noter $B' = P^{-1}BQ$. Alors on a $A'B' = Q^{-1}ABQ$, donc $A'B'$ et AB sont semblables et ont le même polynôme caractéristique, et on a la même chose pour $B'A' = P^{-1}BAP$ et BA. On va donc calculer le produit par bloc de $A'B'$ et de $B'A'$:

$$\begin{aligned} A'B' &= \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ B'A' &= \begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C & 0 \\ E & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, ces deux produits ont le même polynôme caractéristique, donc AB et BA on le même polynôme caractéristique.

Solution 6

1) On a $P(A)x = \sum_{i=0}^{d} p_i A^i x = \sum_{i=0}^{d} p_i \lambda^i x = P(\lambda)x$.
2) a) Puisque $B - \mu I_n = P(A) - \mu I_n = (P - \mu)(A)$, on a donc $B - \mu I_n = (a(X - \alpha_1)\dots(X - \alpha_r))(A) = a(A - \alpha_1 I_n)\dots(A - \alpha_r I_n)$, donc par multiplicativité du déterminant (et par n-linéarité) $det(B - \mu I_n) = a^n det(A - \alpha_1 I_n)\dots det(A - \alpha_r I_n)$.
b) Soit μ valeur propre de B. Alors $det(B - \mu I_n) = 0$, et par le a) avec $a \neq 0$, il existe α_i tel que $det(A - \alpha_i I_n) = 0$ (car $\mathbb{K}$ est intègre). Ainsi, cet α_i est valeur propre de A. Or $P(\alpha_i) - \mu = 0$ par la décomposition de $P - \mu$ en facteurs irréductibles, $\lambda = \alpha_i$ convient.
3) L'inclusion vient du 2)b), et l'inclusion réciproque vient du 1).
4) Par le 3), on a donc $sp(C) = \{Q(\lambda), \lambda \in sp(A)\} = \{0\}$. J'ai mis la question suivante en bonus, puisqu'il faut savoir que les facteurs irréductibles du polynôme minimal de A sont tous diviseurs de Q, donc pour k assez grand (n suffit), $\pi_A | Q^k$ et donc $C^k = 0$. Pour montrer que c'est vrai sans cela, il faut savoir que tout matrice est triangularisable dans $\mathbb{C}$, et la triangularisée de C qu'on obtient aura des 0 sur la diagonale car les éléments diagonaux d'une matrice triangulaire sont exactement ses valeurs propres. Ainsi, elle est nilpotente car strictement triangulaire supérieure.