Colle semaine 9 MP

Pierre Le Scornet

25 novembre 2020

Exercice 1 - *

1) Soit $u \in L(E)$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, tel que $u^3 = id_E$. Montrer que $E = \ker(u - id_E) \oplus \ker(u^2 + u + id_E)$.
2) Supposons que $P = QR \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de u, avec $P \wedge Q = 1$. Montrer que $Im(Q(u)) = \ker(R(u))$.

Exercice 2 - *

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Supposons que f possède un polynôme annulateur P tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer que $\ker(f) + Im(f) = E$.

Exercice 3 - *

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, et soient F, G deux sous-espaces de E supplémentaires et stables par u. Montrer que $\pi_u = ppcm(\pi_{u_{|F}}, \pi_{u_{|G}})$.

Exercice 4 - **

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
1) Calculer le polynôme caractéristique de A, en déduire son polynôme minimal.
2) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ A^n en fonction de A et I_3.

Exercice 5 - **

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, tel que $A^2 + A + I_n = 0$.
1) Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que la matrice A est diagonalisable.
2) Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
a) Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable, et en déduire que n est pair.
b) Proposer une telle matrice A pour $n = 2$. En déduire une telle matrice A pour tout n pair.

Exercice 6 - **

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n < \infty$. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe un élément $x \in E$ tel que le polynôme minimal de u en x est exactement π_u.
1) Montrer que $I_x = \{P \in \mathbb{K}[X], P(u)(x) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. On note π_x le polynôme engendrant cet idéal, que l'on appelle le polynôme minimal de u en x.

2) Montrer que $E_x = \{P(f)(x), P \in \mathbb{K}[X]\}$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension $\deg \pi_x$.
3) a) Soient $x, y \in E$ tels que $E_x \cap E_y = \{0\}$, montrer que $\pi_{x+y} = ppcm(\pi_x, \pi_y)$.
b) Si π_x et π_y sont premiers entre eux, montrer que $E_{x+y} = E_x \oplus E_y$.
4) Soit $M \in \mathbb{K}[X]$ un facteur irréductible de π_u et α sa multiplicité dans π_u. Montrer qu'il existe $x \in \ker M^\alpha(u)$ tel que $\pi_x = M^\alpha$. Conclure.

Solution 1

1) On applique le lemme des noyaux à $P = X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$. Puisque ces deux facteurs sont premiers entre eux, par le lemme des noyaux on a :

$$E = \ker 0 = \ker(u^3 - id_E) = \ker(u - id_E) \oplus \ker(u^2 + u + id_E)$$

2) On applique de même le lemme des noyaux sur $P = QR$. Puisque P est un polynôme annulateur, on a $E = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$. On va montrer l'égalité par double inclusion (*attention : ici on ne peut pas montrer l'égalité simplement par une inclusion et l'égalité des dimensions, puisque l'on est pas en dimension finie*).

- Soit $y \in Im(Q(u))$, et soit $x \in E$ tel que $y = Q(u)(x)$. Alors, on a $R(u)(y) = R(u)(Q(u)(x)) = RQ(u)(x) = 0$. Ainsi, $y \in \ker(R(u))$ et on a $Im(Q(u)) \subseteq \ker(R(u))$.

- Soit $x \in \ker(R(u))$. On applique le théorème de Bezout sur Q, R : $\exists A, B \in \mathbb{K}[X], AQ + BR = 1$. Ainsi, on a $x = AQ(u)(x) + BR(u)(x) = AQ(u)(x)$. On a donc $x = AQ(u)(x) = Q(u)(A(u)(x))$, et donc $x \in Im(Q(u))$.

Solution 2

Puisque $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$, alors on peut écrire $P = QX$ avec $Q \wedge X = 1$. Supposons que $y \in \ker f \cap Im(f)$, et soit $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Alors on a $f^2(x) = f(y) = 0$, et $f^p(x) = 0, \forall p \geq 2$. Ainsi, si l'on applique $P(f)$ à x, on obtient $0 = \sum_{i=0}^n p_i f^i(x) = p_1 f(x) = p_1 y$, et puisque $p_1 \neq 0$ on a $y = 0$. Ainsi, les deux sous-espaces sont d'intersection vide, et on conclut par le théorème du rang que leur somme est exactement E.

Solution 3

On pose P le ppcm des deux polynômes minimaux induits. Alors, $\forall x \in F$, on a $P(u)(x) = 0$ puisque $\pi_{u_{|F}}(u)(x) = \pi_{u_{|F}}(u_{|F})(x) = 0$ (avec F stable par u et $\pi_{u_{|F}} | P$), et de même, $P(u)(y) = 0, \forall y \in G$. Ainsi, on sait que $\pi_u | P$. Réciproquement, puisque π_u annule ses endomorphismes induits, on a $\pi_{u_{|F}} | \pi_u$ et $\pi_{u_{|G}} | \pi_u$, donc leur ppcm P divise π_u. Or P et π_u sont unitaires, donc ils sont égaux.

Solution 4

1) $\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 4 & X-4 & 0 \\ 2 & -1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2) \begin{vmatrix} X & -1 \\ 4 & X-4 \end{vmatrix} = (X-2)^3$. Ainsi, la seule valeur propre de A est 2 et le polynôme minimal est de la forme $\pi_A = (X-2)^r$, $r \leq 3$. On remarque que $A - 2I_3 \neq 0$, et on calcule $(A - 2I_3)^2$ ce qui donne 0. Ainsi, on a $\pi_A = (X-2)^2$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut calculer $(X^n)(A)$, en utilisant le fait que $(X-2)^2(A) = 0$. Pour cela, on va écrire la division euclidienne de X^n par $(X-2)^2$: on a alors $X^n = (X-2)^n Q_n + a_n X + b_n$, et donc $A^n = a_n A + b_n I_n$. Pour éliminer le Q_n de cette équation afin de déterminer a_n et b_n, on va appliquer l'égalité en 2 : $2^n = 2a_n + b_n$. Il nous en faut une deuxième : pour cela, on va dériver l'égalité en $nX^{n-1} = 2(X-2)Q_n + (X-2)^2 Q_n' + a_n$, ce qui en 2 donne $n2^{n-1} = a_n$. Ainsi, on a $a_n = n2^{n-1}$ et $b_n = (1-n)2^n$, et on a déterminé $A^n = n2^{n-1}A + (1-n)2^n I_3$.

Solution 5

1) Le polynôme $P = X^2 + X + 1$ est un polynôme annulateur de A, et est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$. Ainsi, A est diagonalisable.
2) a) P est un polynôme annulateur non scindé, et est de degré 2 donc P est irréductible. Ainsi, $P = \pi_A$ qui n'est pas scindé (et encore moins à racines simples) donc A n'est pas diagonalisable. De plus, le polynôme minimal et le polynôme caractéristique ont les mêmes facteurs irréductibles, donc $\chi_A = P^k$, donc χ_A est de degré $2k$, i.e. $n = 2k$.
b) Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $\chi_A = P^1 = X^2 + X + 1$, on en déduit $a + d = -1$, et $ad - bc = 1$. Il ne reste plus qu'à choisir : par exemple $a = -1, d = 0, b = 1, c = -1$, et $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =: A_2$. Pour généraliser à des n pairs plus grands, on chercher une matrice dont le polynôme caractéristique est $P^{n/2}$ et le polynôme minimal est P : on va prendre la matrice diagonale par blocs où chaque bloc est égal à A_2. On montre facilement qu'il convient.

Solution 6

1) Le fait d'être un sous-groupe additif vient de la linéarité de la somme de polynôme, appliquée à u puis x. De plus, on montre facilement que $PQ(u)(x) = QP(u)(x)$ et on en déduit l'idéalité. On remarque qu'il est non vide, puisque π_u y est.
2) D'une part, E_x est exactement l'image de l'application $P \mapsto P(u)(x)$. De plus, on peut montrer que cet espace est de dimension inférieure ou égale à $\deg(\pi_x)$ en montrant par une récurrence immédiate que pour $k \geq \deg(\pi_x)$, on a $X^k(u)(x) \in E_x$ (l'initialisation vient de $\pi_x(u)(x) = 0$, et l'hérédité se fait simplement par une division euclidienne par π_x). Or, si cette dimension était strictement inférieure, alors il existerait $k < \deg(\pi_x)$ tel que $u^k(x) \in Vect(x, u(x), \dots u^{k-1}(x))$, ce qui en écrivant l'un comme combinaison linéaire des autres donne un polynôme annulateur (non nul) de u en x de degré plus petit que $\deg \pi_x$. Ainsi, la dimension de E_x est exactement $\deg(\pi_x)$.
3)a) On a $\pi_{x+y}(u)(x + y) = 0$, on a donc par linéarité de u $\pi_{x+y}(u)(x) = -\pi_{x+y}(u)(y)$. Le premier terme est dans E_x, l'autre dans E_y, et puisqu'ils sont égaux ils sont donc tout deux nuls. Ainsi, on a $\pi_x | \pi_{x+y}$ et $\pi_y | \pi_{x+y}$, et donc $ppcm(\pi_x, \pi_y) | \pi_{x+y}$. De plus, on a $ppcm(\pi_x, \pi_y)(u)(x+y) = ppcm(\pi_x, \pi_y)(u)(x) + ppcm(\pi_x, \pi_y)(u)(y)$ et ces deux termes sont nuls puisque le ppcm est divisible par π_x d'une part et π_y d'autre part. Ainsi, $\pi_{x+y} | ppcm(\pi_x, \pi_y)$. Puisque ces deux polynômes sont unitaires, ils sont égaux.
b) D'une part, soit $z \in E_x \cap E_y$. On a alors $P(u)(x) = Q(u)(y) = z$. Or, on peut écrire la relation de Bezout sur π_x et π_y puisqu'ils sont premiers entre eux. Ainsi, on a $Q\pi_x + R\pi_y = 1$, avec $Q, R \in \mathbb{K}[X]$, et on a $Q\pi_x(u)(z) + R\pi_y(u)(z) = z = 0$. Ainsi, $E_x \cap E_y = \{0\}$. Par la question précédente, on a donc $\pi_{x+y} = ppcm(\pi_x, \pi_y) = \pi_x \pi_y$. Par la question 2), on a donc $\dim(E_{x+y}) = \dim(E_x) + \dim(E_y)$. On peut donc conclure que $E_{x+y} = E_x \oplus E_y$.
4) On va écrire $\pi_u = M^\alpha N$, donc avec $N \wedge M^\alpha = 1$. On peut donc appliquer le lemme de décomposition des noyaux à ce produit, et on obtient $E = \ker M^\alpha(u) \oplus \ker N(u)$. Ainsi, pour tout $x \in \ker M^\alpha(u)$, on a $M^\alpha(u)(x) = 0$ donc $\pi_x | M^\alpha$. Puisque M est irréductible, on a donc $\pi_x = M^{\beta_x}$, avec $\beta_x \leq \alpha$. On va montrer qu'il existe $x \in \ker M^\alpha(u)$ tel que $\beta_x = \alpha$: supposons qu'un tel x n'existe pas, alors pour tout $x \in \ker M^\alpha(u)$ on a $\pi_x | M^{\alpha-1}$ (car $\beta_x \leq \alpha - 1$) et donc $M^{\alpha-1}(u)(x) = 0$. Ainsi, on a $\ker M^\alpha(u) \subseteq \ker M^{\alpha-1}(u)$, et l'autre inclusion est évidente. Ainsi, $E = \ker M^{\alpha-1}(u) \oplus \ker N(u)$, et donc $M^{\alpha-1}N(u) = 0$ ce qui est impossible par minimalité de π_u. Ainsi, il existe $x \in E$ tel que $\pi_x = M^\alpha$.
Pour conclure, on va naturellement généraliser les résultats des questions 3)a) et 3)b) à une somme de p vecteurs. Alors, pour chaque facteur irréductible distinct M_i, il va exister x_i un vecteur tel que $\pi_x = M_i^{\alpha_i}$. En prenant leur somme, et en utilisant la question 3)b) généralisée, on obtient $E_{x_1+\dots+x_p} = E_{x_1} \oplus \dots \oplus E_{x_p}$, et en appliquant la question 3)a) on obtient $\pi_{x_1+\dots+x_p} = ppcm((M_i^{\alpha_i})_{1 \leq i \leq p}) = \prod_{i=1}^p M_i^{\alpha_i} = \pi_u$, ce qui conclut cet exercice.

Cet exercice met en place les pré-requis à l'étude des endomorphismes cycliques, eux-mêmes étant indispensables à la réduction de Frobenius, une réduction en matrice diagonale par bloc (de matrices compagnons) de toute matrice telle que deux matrices sont semblables ssi elles ont la même réduction de Frobenius (on appelle la suite de polynômes obtenus les invariants de similitude).