Modélisation de la dynamique d’un plongeoir

P. Le Scornet (A. Debussche et E. Faou)

École Normale supérieure de Rennes, INRIA

Rapport de stage, 20 mai - 20 juillet 2019

Schéma simplifié d'un plongeoir

Figure 1 – Schéma d'un plongeoir simplifié

- Libre à droite en L
- Contact unilatéral ponctuel en l
- Pivot à gauche en 0

Schéma d'une poutre, modèles de déformation

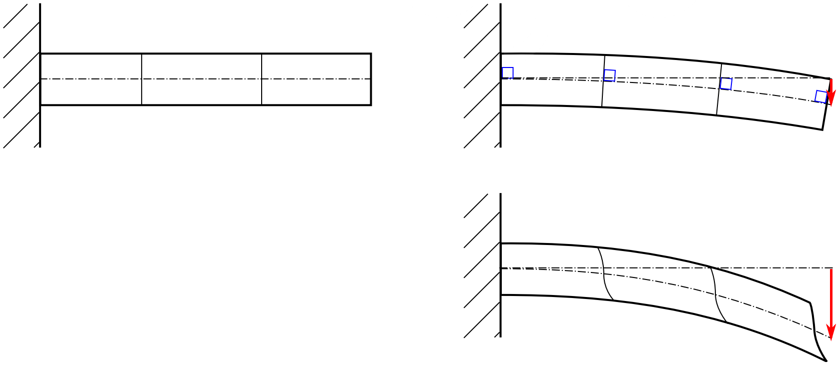

Figure 2 – Schéma de la fibre moyenne et de la section droite d'une poutre

- Déplacement vertical $u(x,t)$
- Angle de cisaillement $\theta(x,t)$.

Système d'équation différentielles partielles

Le modèle de Timoshenko s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial \theta}{\partial x} + f(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial t^2})^2 u \\ g\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} - \theta = \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \end{cases}$$

- Version adimensionnée de l'équation
- $2 \leq g \leq 3$ est un paramètre dépendant du matériau, de la forme de la poutre
- f est la somme des forces extérieures s'appliquant à la poutre

Modèle linéarisé

On néglige le terme en $(\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2})^2 u$ ce qui nous donne :

$$\begin{cases} \ddot{u} = u'' - \theta' + f \\ \ddot{\theta} = g\theta'' + u' - \theta \end{cases}$$

qui peut s'écrire comme :

$$\begin{cases} \ddot{u} = \vec{N}' + f \\ \ddot{\theta} = g\vec{M}' + \vec{N} \end{cases}$$

Conditions limite

Figure 3 – Schéma d'un plongeoir simplifié

- À gauche, $\vec{M} = \theta' = 0$ et $u = 0$
- À droite, $\vec{M} = \theta' = 0$ et $\vec{N} = u' - \theta = 0$

Notations et théorème

- $\mathcal{Q} =]0; L[\times]0; T[$,
- $V = H_0^1(\Omega),\ H = L^2(\Omega)$,
- $\mathcal{K} = \{u \in L^\infty(0, T; V) \cap W^{1,\infty}(0, T; H) / u(l, t) \geq 0\}$

Notations et théorème

- $\mathcal{Q} =]0;L[\times]0;T[$,
- $V = H_0^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$,
- $\mathcal{K} = \{u \in L^\infty(0,T;V) \cap W^{1,\infty}(0,T;H) / u(l,t) \geq 0\}$

Théorème

Il existe $u \in \mathcal{K}$ telle que :

- $\Box u = \ddot{u} - u'' \in M^1(\mathcal{Q})$
- $\forall v \in \mathcal{K}, \langle \Box u, v - u \rangle \geq \int_{\mathcal{Q}} f(v-u)dxdt$

Notations et théorème

- $\mathcal{Q} =]0; L[\times]0; T[$,
- $V = H_0^1(\Omega),\ H = L^2(\Omega)$,
- $\mathcal{K} = \{u \in L^\infty(0, T; V) \cap W^{1,\infty}(0, T; H) / u(l, t) \geq 0\}$

Théorème

Il existe $u \in \mathcal{K}$ telle que :

- $\Box u = \ddot{u} - u'' \in M^1(\mathcal{Q})$
- $\forall v \in \mathcal{K}, \langle \Box u, v - u \rangle \geq \int_{\mathcal{Q}} f(v - u) dxdt$

Remarque

On peut même montrer que $\Box u - f = \mu \in M_+^1(\mathcal{Q})$, avec μ à support dans $\{l\}\times]0; T[$

Discrétisation des dérivées

$$u''(x,\cdot) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x,\cdot) - 2u(x,\cdot) + u(x-\Delta x,\cdot)}{\Delta x^2}$$

$$u'(x,\cdot) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x,\cdot) - u(x-\Delta x,\cdot)}{2\Delta x}$$

Discrétisation de l'équation

On veut discrétiser :

$$\Box u = f$$

avec

$$u(x,0) = u_0(x), \dot{u}(x,0) = u_1(x)$$
$$u(0,t) = 0, u'(L,t) = 0$$

Discrétisation de l'équation

On veut discrétiser :

$$\Box u = f$$

avec

$$u(x,0) = u_0(x), \dot{u}(x,0) = u_1(x)$$

$$u(0,t) = 0, u'(L,t) = 0$$

Cela donne :

$$\frac{U_j^{k+1} - 2U_j^k + U_j^{k-1}}{\Delta t^2} = \frac{U_{j+1}^k - 2U_j^k + U_{j-1}^k}{\Delta x^2} + f(j\Delta x, k\Delta t)$$

d'où :

$$U_j^{k+1} = 2U_j^k - U_j^{k-1} + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}(U_{j+1}^k - 2U_j^k + U_{j-1}^k) + \Delta t^2 f(k\Delta x, j\Delta t)$$

Modélisation du contact ponctuel

$$U_j^{k+1} = 2U_j^k - U_j^{k-1} + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}(U_{j+1}^k - 2U_j^k + U_{j-1}^k) + \Delta t^2 f(k,j)$$

On modélise le contact au point $n_l = n_x \frac{l}{L}$ très simplement par :

$$U_{n_l}^{k+1} = \max[0, 2U_{n_l}^k - U_{n_l}^{k-1} + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}(U_{n_l+1}^k - 2U_{n_l}^k + U_{n_l-1}^k) + f(k,j)]$$

Modélisation du contact ponctuel

$$U_j^{k+1} = 2U_j^k - U_j^{k-1} + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}(U_{j+1}^k - 2U_j^k + U_{j-1}^k) + \Delta t^2 f(k,j)$$

On modélise le contact au point $n_l = n_x \frac{l}{L}$ très simplement par :

$$U_{n_l}^{k+1} = \max[0, 2U_{n_l}^k - U_{n_l}^{k-1} + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}(U_{n_l+1}^k - 2U_{n_l}^k + U_{n_l-1}^k) + f(k,j)]$$

Conditions limites :

- À gauche : $u = 0$ devient $U_0^k = 0$
- À droite : $u' = 0$ $U_{n_x+1}^k = U_{n_x}^k$ pour obtenir :

$$U_{n_x}^{k+1} = 2U_{n_x}^k - U_{n_x}^{k-1} + \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2}(U_{n_x-1}^k - U_{n_x}^k) + f(k,j)$$

Résultat numérique

Résultats numériques

Pour plus d'informations :

Haïm Brezis.
Analyse Fonctionelle.
Dunod, 1999.

Michelle Schatzmann, Michel Bercovier.
Numerical approximation of a wave equation with unilateral constraints..
Mathematics of Computation, 1989.

Michelle Schatzmann.
Un problème hyperbolique du 2ème ordre avec contrainte unilatérale : La corde vibrante avec obstacle ponctuel..
Journal of Differential Equations, 1980.