ANNÉE 2019

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

MÉMOIRE DE MASTER

Rémi MOREAU

LEÇON 264 : VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

leçon encadrée par **B. SCHAPIRA**

Table des matières

Bien que la notion de risque soit apparue très tôt avec le développement du commerce ou des jeux de hasard, la théorie des probabilités n'apparaît qu'au XVII-ème siècle avec les travaux de HUYGENS et de J. BERNOULLI. La théorie des probabilités que l'on connaît aujourd'hui est basée sur la théorie de la mesure et de l'intégration. Elle apparaît au XX-ème siècle, avec les travaux de KOLMOGOROV notamment.

Une variable aléatoire est alors une application définie sur l'ensemble des événements possibles : le résultat du lancer d'un dé, la boule obtenue lors d'un tirage, la durée de vie d'une ampoule...

Dans la suite de ce mémoire, l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.

1 Variables aléatoires discrètes

1.1 Définitions

Définition 1 (*Variable aléatoire discrète*)

Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable, E un ensemble.
Une application $X : \Omega \to E$ est une variable aléatoire discrète si :

(i) $X(\Omega)$ *est dénombrable*

(ii) $\forall x \in E,\ X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{F}$.

Remarque 1. Si E est muni d'une tribu $\mathcal{E}$ contenant les points, alors toute variable aléatoire discrète est une variable aléatoire $(\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathcal{E})$.

Définition 2 (*Loi de probabilités d'une variable aléatoire discrète*)

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace probabilisé.
La loi de X est donnée par l'application $x \in E \mapsto \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X^{-1}(\{x\}))$.

1.2 Exemples de lois discrètes

1.2.1 Loi uniforme

Définition 3

Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$ si $X(\Omega) = \{1, \ldots, n\}$ et

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}.$$

On note $X \sim \mathcal{U}(\{1, \ldots, n\})$.

Exemple 1. Lors du lancer d'un dé à six faces non truqué, le chiffre obtenu suit une loi uniforme sur $\{1, \ldots, 6\}$.
Si une urne contient n boules numérotées de 1 à n, alors le numéro de la boule tirée suit une loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$.

1.2.2 Loi de Bernoulli

Définition 4

Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli *de paramètre $p \in]0,1[$ si $X(\Omega) = \{0,1\}$ et*

$$\mathbb{P}(X = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X = 0)\,.$$

On note $X \sim \mathcal{B}(1, p)$.

Exemple 2. Lors du lancer d'une pièce équilibrée, la variable qui vaut 1 si l'on obtient pile, 0 sinon, suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Remarque 2. Une loi de Bernoulli modélise une expérience aléatoire à deux issues, généralement appelées *succès* et *échec*.

1.2.3 Loi binomiale

Définition 5

Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$ si :

$$X(\Omega) = \{0, \dots, n\} \ \text{ et } \ \forall k \in \{0, \dots, n\},\ \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\,.$$

On note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Exemple 3. Si l'on répète un lancer de pièces n fois et si X désigne le nombre de piles obtenus, alors $X \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.

1.2.4 Loi géométrique

Définition 6

Une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}\,.$$

On note $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Exemple 4. Si X désigne le rang du premier "pile" obtenu lors de lancers d'une pièce équilibrée, alors $X \sim \mathcal{G}(\frac{1}{2})$.

Remarque 3. Une loi géométrique modélise le premier succès d'une épreuve à deux issues.

1.2.5 Loi de Poisson

Définition 7

Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson *de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et*

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}\,.$$

On note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Exemple 5. Le nombre de pièces défectueuses sur une chaîne de production peut être modélisé par une loi de Poisson. Cette loi permet en général de modéliser des événements rares.

1.2.6 Loi hypergéométrique

Définition 8

Une variable aléatoire X suit une loi hypergéométrique de paramètres $0 \leq M \leq n \leq N$ si $X(\Omega) = \{0, \ldots, M\}$ et

$$\forall k \in \{0, \ldots, M\},\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

On note $X \sim \mathcal{H}(N, M, n)$.

Exemple 6. Lors d'un tirage sans remise de n boules dans une urne en contenant N, dont M noires, le nombre de boules noires tirées suit une loi $\mathcal{H}(N, M, n)$.

1.3 Conditionnement

Définition 9 (*Probabilité conditionnelle*)

Soit $B \in \mathcal{F}$ un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. On définit la probabilité sachant B par :

$$\mathbb{P}(\,\cdot \mid B) : A \in \mathcal{F} \mapsto \mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Remarque 4. L'application $\mathbb{P}(\,\cdot \mid B)$ définit une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Définition 10 (*Système complet d'événements*)

Un système complet d'événements est une famille $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{F}^I$ avec I dénombrable, telle que :

(i) $\forall i, j \in I,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

(ii) $\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i \in I} A_i\right) = 1.$

Remarque 5. Si X est une variable aléatoire discrète et $X(\Omega) = \{x_i\}_{i \in I}$, alors $(\{X = x_i\})_{i \in I}$ est un système complet d'événements.

Proposition 1 (*Formule des probabilités totales*)

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements. Si $\mathbb{P}(A_i) > 0$ pour tout $i \in I$, alors :

$$\forall A \in \mathcal{F},\ \mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \mid A_i)\, \mathbb{P}(A_i).$$

Proposition 2 (*Formule de* Bayes)

Sous les mêmes hypothèses, si de plus $\mathbb{P}(A) > 0$, alors :

$$\mathbb{P}(A_i \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid A_i)\, \mathbb{P}(A_i)}{\sum_{j \in I} \mathbb{P}(A \mid A_j)\, \mathbb{P}(A_j)}.$$

Remarque 6. La formule de Bayes permet notamment de renverser le conditionnement.

Exemple 7. A un carrefour, le nombre de voitures X arrivant en une minute suit une loi de POISSON de paramètre λ. Il y a deux directions possibles, chaque véhicule emprunte la première avec probabilité p et Y désigne le nombre de véhicules prenant cette direction. Autrement dit :

$$\mathcal{L}(Y \mid X = n) = \mathcal{B}(n, p)\,.$$

Pour déterminer la loi de Y, on calcule alors :

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n, Y = k) = \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}\,.$$

Donc Y suit une loi de POISSON de paramètre λp. De plus, si $n \geq k$, alors :

$$\mathbb{P}(X = n \mid Y = k) = \frac{\mathbb{P}(X = n, Y = k)}{\mathbb{P}(Y = k)} = \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda(1-p)}\,.$$

Donc la loi conditionnelle de X sachant $Y = k$ est une loi de POISSON de paramètre $\lambda(1-p)$ translatée de k.

À l'origine, on associait l'une des valeurs possibles à un succès, un gain, dans un jeu. Dans cette optique, il était intéressant de connaître l'espérance de la variable aléatoire, c'est-à-dire la somme moyenne que l'on pouvait espérer gagner (ou perdre) en jouant.

Cette idée correspond à la notion de moment d'ordre 1 en théorie des probabilités. Nous verrons en particulier dans cette partie comment définir les moments d'une variable aléatoire et quelques caractéristiques.

2 Moments d'une variable aléatoire discrète et indépendance

2.1 Espérance et moments d'ordre supérieur

Définition 11 (*Espérance*)

Soit X une variable aléatoire discrète réelle. Si

$$\sum_{x \in \mathbb{R}} |x| \mathbb{P}(X = x) < \infty ,$$

alors on définit l'espérance de X par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \, \mathbb{P}(X = x) .$$

Exemple 8. Si $\mathbb{P}(X = k) = \frac{6}{\pi^2 k^2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, alors X n'admet pas d'espérance.

Proposition 3 (*Théorème de transfert*)

Soient $X : \Omega \to E$ variable aléatoire discrète, $f : E \to \mathbb{R}$ mesurable. Si

$$\sum_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \mathbb{P}(X = x) < \infty ,$$

alors :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) \, \mathbb{P}(X = x) .$$

Application 1 (*Théorème de* WEIERSTRASS)

Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Considérons la suite des polynômes de Bernstein définie par :

$$\left(B_n(f) : x \in [0,1] \mapsto \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right)_{n \in \mathbb{N}} .$$

La suite de polynômes $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers f.

Démonstration : Soit $x \in [0,1]$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(1, x)$. Notons pour $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{B}(n, p)$. Remarquons que :

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n} \right) \right) = B_n(f)(x) .$$

Par le théorème de HEINE, f est uniformément continue sur le compact $[0,1]$, donc pour $\varepsilon > 0$:

$$\exists \eta > 0, \ \forall x, y \in [0,1], \ |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon .$$

De là, par convexité de $x \mapsto |x|$, inégalité de JENSEN et inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV :

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n(f)(x)| &\leq \mathbb{E}\left(\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \mathbb{1}_{|x-\frac{S_n}{n}|\leq\eta}\right) + \mathbb{E}\left(\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \mathbb{1}_{|x-\frac{S_n}{n}|>\eta}\right) \\
&\leq \varepsilon + 2\,\|f\|_\infty\, \mathbb{P}\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right| > \eta\right) \\
&\leq \varepsilon + 2\,\|f\|_\infty\, \frac{x(1-x)}{n\eta^2} \quad \text{car } Var(S_n) = nx(1-x) \\
&\leq \varepsilon + 2\,\|f\|_\infty\, \frac{1}{4n\eta^2}\,.
\end{aligned}$$

Donc, $\limsup_{n\to\infty} \|f - B_n(f)\|_\infty \leq \varepsilon$ et donc lorsque ε tend vers 0 :

$$\|f - B_n(f)\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Corollaire 1

L'espace des polynômes $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

Corollaire 2

Si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f, alors f est un polynôme.
En particulier, les séries entières usuelles ne convergent pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : Sous de telles hypothèses, la suite (P_n) est en particulier de Cauchy, donc :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \|P_n - P_{n_0}\|_\infty \leq 1\,.$$

De là, $P_n - P_{n_0}$ est un polynôme constant, donc $P_n = P_{n_0} + P_n(0) - P_{n_0}(0)$ puis à la limite $n \to \infty$:

$$f = P_{n_0} + f(0) - P_{n_0}(0)\,.$$

Définition 12 (*Moment d'ordre p*)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Si X est une variable aléatoire discrète telle que $\mathbb{E}(|X|^p) < \infty$, alors on appelle moment d'ordre p de X la quantité $\mathbb{E}(X^p)$.

Définition 13 (*Variance*)

Si X admet un moment d'ordre 2, alors on définit sa variance par $Var(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$.

Remarque 7. L'espérance s'interprète comme la moyenne de la variable aléatoire et la variance comme la distance de cette variable à sa moyenne.

Proposition 4 (*Formule de* KÖNIG-HUYGHENS)

Si X admet un moment d'ordre 2, alors : $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

Exemple 9. Le tableau ci-dessous résume les espérances et variances des lois usuelles.

Loi de X	$\mathcal{U}(\{1,\ldots,n\})$	$\mathcal{B}(n,p)$	$\mathcal{G}(p)$	$\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathcal{H}(N,M,n)$
$\mathbb{E}(X)$	$\frac{n+1}{2}$	np	$\frac{1}{p}$	λ	$\frac{nM}{N}$
$Var(X)$	$\frac{n^2-1}{12}$	$np(1-p)$	$\frac{1-p}{p^2}$	λ	$\frac{N-n}{N-1}\frac{nM}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)$

2.2 Série génératrice des moments

Définition 14

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. L'application $G_X : s \mapsto \mathbb{E}(s^X)$ est appelée fonction génératrice de X.

Proposition 5

La fonction G_X est continue sur $[-1,1]$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. De plus :

$$\forall s \in [-1,1],\ G_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=n)\, s^n$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}\,.$$

Exemple 10. Soit $s \in [-1,1]$.

(i) Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors $G_X(s) = (ps+1-p)^n$.

(ii) Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $G_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$.

(iii) Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors $G_X(s) = \frac{p^s}{1-(1-p)s}$.

Proposition 6

Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ admet un moment d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si $G_X^p(1^-)$ existe. Dans ce cas,

$$G_X^p(1^-) = \mathbb{E}\left[X(X-1)\dots(X-p+1)\right]\,.$$

2.3 Indépendance et somme de variables aléatoires discrètes

Définition 15

Les variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites indépendantes si pour tout entier k :

$$\forall n_1,\dots n_k \in \mathbb{N},\ \forall x_{n_1},\dots,x_{n_k} \in X_{n_1}(\Omega)\times\cdots\times X_{n_k}(\Omega),$$
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k}\{X_{n_j}=x_{n_j}\}\right) = \prod_{j=1}^{k}\mathbb{P}(X_{n_j}=x_{n_j})\,.$$

Exemple 11.

(i) Vérifier que la probabilité de l'intersection de tous les événements est le produit de leurs probabilités ne suffit pas pour avoir l'indépendance : considérons pour un lancer de dé les événements $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,4,6\}$ et $C=\{1,2,4,5\}$.
On a :
$$\mathbb{P}(A\cap B\cap C) = \mathbb{P}(\{2\}) = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$
mais :
$$\mathbb{P}(A\cap B) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\,.$$
Les variables aléatoires $\mathbb{1}_A$, $\mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_C$, de loi de Bernoulli, fournissent le contre-exemple.

(ii) Il ne suffit pas non plus d'avoir l'indépendance deux à deux pour assurer l'indépendance. Considérons, sur $\Omega = \{1,2,3,4\}$, les événements $A = \{1,2\}$, $B = \{1,3\}$ et $C = \{1,4\}$.

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)\,.$$

Pourtant :

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)\,.$$

Les variables aléatoires $\mathbb{1}_A$, $\mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_C$, de loi de BERNOULLI, fournissent le contre-exemple.

Proposition 7

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Lemme 1 (BOREL-CANTELLI)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ une famille d'événements.

(i) Si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$ alors $\mathbb{P}(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n) = 0$.

(ii) Si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ et si les (A_n) sont indépendants, alors $\mathbb{P}(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n) = 1$.

Démonstration :

(i) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, par σ-additivité :

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k\right) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq m} A_k\right) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

car il s'agit du reste d'une série convergente.

(ii) Les événements (A_n) étant indépendants, les (A_n^c) le sont aussi, et par croissance monotone :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) &= 1 - \mathbb{P}(\liminf_{n\to\infty} A_n^c) \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} \lim_{q\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{q} A_k^c\right) \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} \lim_{q\to\infty} \prod_{k=n}^{q} (1 - \mathbb{P}(A_k)) = 1
\end{aligned}$$

car par convexité de l'exponentielle, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \lim_{q\to\infty} \prod_{k=n}^{q} (1 - \mathbb{P}(A_k)) \leq \lim_{q\to\infty} \exp\left(-\sum_{k=n}^{q} \mathbb{P}(A_k)\right) = 0\,.$$

Exemple 12. Si $k \in \mathbb{N}$, $A \in \{0,1\}^k$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim \mathcal{B}(1,p)$ indépendants, alors A apparaît presque sûrement une infinité de fois dans la suite de chiffres (X_n).

En effet, si l'on pose $A_m = \{A = (X_{1+km}, \ldots, X_{m+km})\}$, alors les événements $\{A_m\}$ sont indépendants et $\forall m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_m) = p^{k_1}(1-p)^{k_2}$, avec k_1 (resp. k_2) le nombre de 1 (resp. de 0) dans A. En particulier, $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_m) = \infty$ donc par indépendance,

$$\mathbb{P}(\limsup_{m\to\infty} A_m) = 1\,.$$

Autrement dit, A_m est réalisé pour une infinité de m.

Proposition 8

Soient X_1, X_2 variables aléatoires discrètes indépendantes à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$, où E est stable par addition.
La variable aléatoire $X_1 + X_2$ est discrète et sa loi est donnée par :

$$\forall x \in E,\ \mathbb{P}(X_1 + X_2 = x) = \sum_{x_1 \in E} \mathbb{P}(X_1 = x_1)\, \mathbb{P}(X_2 = x - x_1)\,.$$

Proposition 9

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors :

$$\forall s \in [-1, 1],\ G_{X+Y}(s) = G_X(s) G_Y(s)\,.$$

Exemple 13.

(i) La somme de n variables de BERNOULLI indépendantes de paramètre p suit une $\mathcal{B}(n, p)$.

(ii) Si $X \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n_2, p)$ sont indépendantes, alors $X + Y \sim \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$.

(iii) Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ sont indépendantes, alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

Exemple 14. Il n'est pas possible de truquer deux dés à six faces indépendants de sorte que leur somme suive une loi uniforme sur $\{2, \ldots, 12\}$.

Démonstration :

Notons X et Y les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus pour chacun des deux dés, $S = X + Y$. Si $S \sim \mathcal{U}(\{2, \ldots, 12\})$, alors :

$$\forall s \in]-1, 1[,\ G_S(s) = \sum_{i=2}^{12} \frac{1}{11} s^i = \frac{1}{11} s^2 \left(1 + s + \cdots + s^{10}\right) = \frac{s^2}{11} \frac{1 - s^{11}}{1 - s}\,.$$

D'autre part, par indépendance, la proposition précédente s'applique. Donc avec les notations $(p_i = \mathbb{P}(X = i))$ et $(q_i = \mathbb{P}(Y = i))$:

$$\forall s \in]-1, 1[,\ G_S(s) = G_X(s) G_Y(s) = \left(\sum_{i=1}^{6} p_i s^i\right) \left(\sum_{i=1}^{6} q_i s^i\right)\,.$$

En particulier, en simplifiant par s^2, et en notant $\phi_X(s) = \sum_{i=1}^{6} p_i s^{i-1}$, $\phi_Y(s) = \sum_{i=1}^{6} q_i s^{i-1}$, il vient donc par égalité des polynômes ci-dessous sur]-1,1[:

$$\forall s \in \mathbb{R},\ \phi_X(s) \phi_Y(s) = \frac{s^2}{11} \frac{1 - s^{11}}{1 - s} = \frac{1}{11} \left(1 + s + \cdots + s^{10}\right)\,.$$

Or ϕ_X et ϕ_Y sont des polynômes de degré 5 (impair), donc admmettent tous deux au moins une racine réelle, alors que la seule racine onzième réelle de l'unité est 1 (car 11 est impair).
Donc c'est absurde : S ne peut pas suivre la loi $\mathcal{U}(\{2, \ldots, 12\})$.

Développement 1 (*Processus de branchement de* GALTON-WATSON)

Soit X une variable aléatoire intégrable à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit $(X_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ une suite double de variables aléatoires indépendantes de loi commune $\mathbb{P}_X$. Posons :

$$Z_0 = 1 \text{ et } Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n}\,.$$

L'objectif est d'étudier la probabilité d'extinction $p_{ext} = \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N},\ Z_n = 0)$.

Démonstration :

Posons $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Si $p_0 = 0$, alors $Z_n \geq Z_0 = 1$ presque sûrement pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $p_{ext} = 0$.
Si $p_0 = 1$, alors $X = 0$ presque sûrement et donc $Z_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc $p_{ext} = 1$.
On supposera donc $p_0 \in]0, 1[$.
Posons $x_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 10

La fonction génératrice G_n de Z_n vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ G_n = G_X^{\circ n}$.

Démonstration : Raisonnons par récurrence. La loi de Z_1 est celle de X d'où l'initialisation.
Par le théorème de Fubini-Tonelli et par indépendance :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(s^{Z_{n+1}}\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{1}_{Z_n=j}\, s^{\sum_{i=1}^{j} X_{i,n}}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{Z_n=j}\, s^{\sum_{i=1}^{j} X_{i,n}}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = j) \prod_{i=1}^{j} \mathbb{E}\left(s^{X_{i,n}}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = j)\, G_X(s)^j = G_n(G_X(s))\,.\end{aligned}$$

Ce calcul permet de conclure par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ G_n = G_X^{\circ n}$.

Proposition 11

La série génératrice de X vérifie les propriétés suivantes :

(i) G_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1[$.

(ii) $G'_{X|]0,1[} > 0,\ \ G''_{X|]0,1[} \geq 0$ et : $G''_{X|]0,1[} > 0 \iff p_0 + p_1 < 1$

Démonstration :

Le premier résultat découle des propriétés des séries entières et du fait que X admet une espérance. Puisque $p_0 < 1$, la série G'_X est à coefficients positifs, non tous nuls, d'où le résultat. G''_X est aussi à termes positifs, donc positive sur $[0, 1[$.
Si $x \in]0, 1[$ et $G''_X(x) = 0$, alors

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)p_n x^{n-2} = 0.$$

Puisque chacun des termes est positif et $x \neq 0$,

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\},\ p_n = 0.$$

Donc $p_0 + p_1 = 1$.
Réciproquement, si $p_0 + p_1 = 1$, alors G est affine, donc $G''_X = 0$.

Proposition 12

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite p_{ext}, le plus petit point fixe de G_X sur $[0, 1]$.

Démonstration :

La suite (x_n) est majorée par 1 et $Z_n = 0 \implies Z_{n+1} = 0$ donc (x_n) est croissante : (x_n) est convergente et par continuité croissante de la probabilité :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{Z_n = 0\}\right) = p_{ext}\,.$$

Par passage à la limite sur la relation

$$x_{n+1} = G_X(G_n(0)) = G_X(x_n),$$

il vient $p_{ext} = G_X(p_{ext})$, autrement dit, p_{ext} est un point fixe de G_X.
Soit $u \in [0,1]$ point fixe de G_X. Par récurrence, $x_0 = 0 \leq u$ et par croissance de G_X :

$$x_{n+1} = G_X(x_n) \leq G_X(u) = u.$$

Donc $x_n \leq u$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et à la limite, $p_{ext} \leq u$. De là, p_{ext} est le plus petit point fixe de G_X.

Proposition 13

Si $p_0 + p_1 = 1$, alors $p_{ext} = 1$. Si $p_0 + p_1 < 1$, alors :
- *si $\mathbb{E}(X) \leq 1$, alors $p_{ext} = 1$.*
- *si $\mathbb{E}(X) > 1$, alors $0 < p_{ext} < 1$.*

Démonstration : Si $p_0 + p_1 = 1$, alors G_X est affine et

$$G_X(x) = x \iff p_0 + p_1 x = x \iff x = 1\,.$$

Sinon :
- si $G'_X(1) = \mathbb{E}(X) \leq 1$, alors $G''_{X|]0,1[} > 0$ donc $\forall s < 1,\ G'_X(s) < 1$. De là :

$$\forall s < 1,\ 1 - G_X(s) = \int_s^1 G'_X(v)\,dv < 1 - s.$$

  Donc $G_X(s) > s$ pour tout $s < 1$: le seul point fixe possible de G_X est 1.

- Si $\mathbb{E}(X) > 1$, alors notons $f : x \mapsto G_X(x) - x$. On a :

$$f'(0) = p_1 - 1 < 0 \text{ et } f'(1) = \mathbb{E}(X) - 1 > 0$$

  donc par théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

x	0	p_{ext}	α		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	p_0 $\searrow$		$f(\alpha)$	$\nearrow$	0

  L'étude de f assure l'existence d'un point d'annulation de f, autrement dit l'existence d'un point fixe de G_X, sur $]0,\alpha]$ puisque $f(\alpha) \leq 0$. Ainsi, $p_{ext} < 1$.

Remarque 8. La population moyenne à la génération n est donnée par :

$$\mathbb{E}(Z_n) = G'_n(1) = G'_{n-1}(G_X(1))G'_X(1) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Z_{n-1}) = \cdots = \mathbb{E}(X)^n\,.$$

Si $\mathbb{E}(X) < 1$, il y a aussi convergence dans L^1 de (Z_n) vers 0.

Considérons le pile ou face pour une pièce équilibrée. Après un grand nombre de lancers, le nombre de 'piles' semble s'approcher de la moitié du nombre de lancers. Ce résultat intuitif est formalisé par la *loi des grands nombres*, apparu pour la première fois à la fin du XVII-ème siècle. C'est sur ce résultat que sont basés les sondages par exemple.

La vitesse de convergence, elle, est donnée par le *théorème central limite*. Ces deux résultats sont extrêmement importants en théorie des probabilités et en statistiques.

3 Comportements asymptotiques

3.1 Approximation de lois

Définition 16

Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X si pour toute fonction f continue bornée sur $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}(f(X_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}(f(X)).$$

On note dans ce cas $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$.

Proposition 14

La suite (X_n) de variables aléatoires réelles converge en loi vers X si et seulement si la suite des fonctions de répartitions $(F_n : x \mapsto \mathbb{P}(X_n \leq t))$ converge vers la fonction de répartition de X en tout point de continuité de cette dernière.

Exemple 15. La suite de variables aléatoires (X_n) vérifiant

$$\mathbb{P}(X_n = \frac{n+1}{n}) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$$

converge en loi vers $X \sim \mathcal{B}(1, \frac{1}{2})$.

Proposition 15 (*Caractérisation de la convergence en loi pour les variables discrètes*)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X \iff \forall k \in \mathbb{Z},\ \mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(X = k).$$

Théorème 1 (*Approximation de la loi de* POISSON)

Supposons que $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ avec $np_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda > 0$.
La suite (X_n) converge en loi vers $\mathcal{P}(\lambda)$.

Démonstration : Appliquons la proposition précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n-k} \\
&\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.
\end{aligned}$$

Puisque $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$.

Remarque 9. La loi de POISSON modélise ainsi des événements rares.

Proposition 16 (*Approximation de la loi binomiale*)

> *Considérons pour $j \in \mathbb{N}$ des variables $X_j \sim \mathcal{H}(N_j, M_j, n)$ avec $\frac{M_j}{N_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} p$.*
> *La suite (X_j) converge en loi vers $\mathcal{B}(n, p)$.*

Démonstration : Soit $j \in \mathbb{N}$. Soit $k \in \{0, \ldots, M_j\}$ tel que $n - k \leq N_j - M_j$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_j = k) &= \frac{\binom{M_j}{k}\binom{N_j - M_j}{n-k}}{\binom{N_j}{n}} \\
&= \binom{n}{k} \prod_{l=0}^{k-1} \left(\frac{M_j - l}{N_j - l} \right) \prod_{l=0}^{n-k-1} \left(\frac{N_j - M_j - l}{N_j - l} \right) \\
&\underset{j\to\infty}{\sim} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Donc la limite en loi de (X_j) suit une loi binomiale de paramètres (n, p).

Développement 2 (*Développement dyadique pour une variable aléatoire*)

Soit $(\varepsilon_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{0,1\}$.

$$X = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{2^k} \sim \mathcal{U}\left([0,1]\right) \iff \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \varepsilon_k \sim \mathcal{B}(1, \frac{1}{2})\,.$$

Démonstration : Si $X \sim \mathcal{U}([0,1])$, alors pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$:

$$\mathbb{P}(\varepsilon_1 = x_1, \ldots, \varepsilon_n = x_n) = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2^k} \leq X \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\right) = \frac{1}{2^n}\,.$$

Par indépendance, le premier terme se réécrit :

$$\mathbb{P}(\varepsilon_1 = x_1, \ldots, \varepsilon_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\varepsilon_i = x_i)\,.$$

Par une récurrence immédiate, $\mathbb{P}(\varepsilon_i = x_i) = \frac{1}{2}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. De là, ceci étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \varepsilon_k \sim \mathcal{B}(1, \frac{1}{2})\,.$$

Réciproquement, posons pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^k},\ \ \phi_n(t) = \mathbb{E}\left(e^{itS_n}\right)\,.$$

Si ϕ_X désigne la fonction caractéristique de X, puisque $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X$, il vient $\phi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \phi_X$. D'autre part, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\phi_n(t) = \mathbb{E}\left[\exp\left(it \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^k}\right)\right] &= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[\exp\left(it \frac{\varepsilon_k}{2^k}\right)\right] \\
&= \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\exp\left(\frac{it}{2^k}\right)\right) \\
&= \exp\left(\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\frac{it}{2}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^{k+1}}\right)\,.
\end{aligned}$$

Or, en exploitant la formule $\sin(t) = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)$, il vient par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \notin 2^{n+1}\pi\mathbb{Z},\ \prod_{k=1}^{n} cos\left(\frac{t}{2^{k+1}}\right) = \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{t}\,.$$

En injectant cette formule dans l'expression de ϕ_n, à la limite $n \to \infty$:

$$\forall t \in \mathbb{R}^*,\ \phi_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\exp\left(\frac{it}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{t} = \frac{e^{it} - 1}{t}\,.$$

Mais si $U \sim \mathcal{U}([0,1])$, alors sa fonction caractéristique ϕ_U s'écrit :

$$\phi_U(t) = \mathbb{E}\left(e^{itU}\right) = \int_0^1 e^{itx} dx = \frac{e^{it} - 1}{t}\,.$$

Donc $\phi_X = \phi_U$, et puisque la fonction caractéristique caractérise la loi, $X \sim \mathcal{U}([0,1])$.

3.2 Loi des grands nombres - Théorème central limite

Définition 17

Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire X si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0\,.$$

On note dans ce cas $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X$.

Théorème 2 (*Loi faible des grands nombres*)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi admettant un moment d'ordre 2. Si $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) \xrightarrow[n\to\infty]{} m$ et $\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} m\,.$$

Corollaire 3

Si les $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des événements indépendants de probabilité p, alors :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} p\,.$$

Remarque 10. Ainsi, la suite de fréquences empiriques d'apparition d'un caractère converge vers la probabilité de l'événement correspondant.

Théorème 3 (*Théorème central limite*)

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi admettant un moment d'ordre 2, alors :

$$\frac{1}{\sqrt{nVar(X_1)}}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mathbb{E}(X_1)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)\,.$$

Exemple 16. Si $X_1,\ldots,X_n \sim \mathcal{P}(1)$, alors $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{P}(n)$ et :

$$e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = \mathbb{P}(S_n \le n) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \le 0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}\,.$$

3.3 Chaînes de MARKOV

Définition 18

Une chaîne de MARKOV *est une suite de variables aléatoires (X_n) à valeurs dans E espace d'états vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$\forall x_1, \dots, x_{n+1} \in E,\ \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n)\,.$$

La chaîne est dite homogène si $P(x,y) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = y)$ (probabilité de passer de l'état x à l'état y) ne dépend pas de n. La loi initiale de la chaîne (X_n) est la loi de X_0, le noyau de transition est $P = (P(x,y))_{x,y\in E}$.

On considère dans la suite des chaînes de MARKOV homogènes.

Définition 19

On définit les itérées de P par récurrence en posant $P^1 = P$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P^{n+1}(x,y) = \sum_{z\in E} P(x,z)P^n(z,y)\,.$$

Remarque 11. Passer de x à y en $n+1$ étapes revient à passer de x à $z \in E$ en une étape, puis de z à y en n étapes.

Théorème 4

Si (X_n) est une chaîne de MARKOV *homogène de noyau de transition P et de loi initiale μ_0, alors :*

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \mu_0(x_0)P(x_0,x_1)\dots P(x_{n-1}x_n)\,.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, la loi de X_n est donnée par $\mu_n = \mu_0 P^n : y \mapsto \sum_{x\in E} \mu_0(x)P^n(x,y)$.

Proposition 17

La loi de la chaîne est caractérisée par sa loi initiale et par le noyau de transition $(P(x,y))_{x,y}$.

Définition 20

Une chaîne de MARKOV *est dite irréductible si :*

$$\forall x,y \in E,\ \exists n \in \mathbb{N},\ P^n(x,y) > 0\,.$$

Exemple 17. Sur $E = \mathbb{Z}^d$, la marche aléatoire équilibrée (X_n) donnée par $X_0 = 0$ et :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |y-x| \neq 1 \\ \frac{1}{2d} & \text{si } |y-x| = 1 \end{cases}$$

définit une chaîne de MARKOV homogène irréductible.

Proposition 18

Soit (U_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs dans $(F,\mathcal{F})$ et indépendantes d'une variable aléatoire X_0. Soit $f : E\times F \to E$ mesurable.
La suite (X_n) définie par $X_{n+1} = f(X_n, U_{n+1})$ définit une chaîne de MARKOV *homogène.*

Définition 21

Soit $x \in E$. Soit (X_n) une chaîne de MARKOV *partant de $X_0 = x$. La suite des temps de retour (T_x^n) en x est définie par récurrence pour $n \in \mathbb{N}^*$:*

$$T_x^1 = T_x = \inf\{k > 0,\ X_k = x\} \text{ et } T_x^{n+1} = \inf\{k > T_x^n,\ X_k = x\}\,.$$

L'état x est dit récurrent si $\mathbb{P}(T_x < \infty) = 1$, transient sinon.
Dans le premier cas, on dira que x est récurrent nul si $\mathbb{E}(T_x) = \infty$, récurrent positif sinon.

Proposition 19

Supposons P irréductible.

(i) Tous les états sont de même nature.

(ii) Dans le cas récurrent, tous les états sont visités une infinité de fois.

(iii) Dans le cas transient, tous les états ne sont visités qu'un nombre fini de fois.

Corollaire 4

Une chaîne de MARKOV *irréductible et finie est récurrente positive.*

Définition 22

Une mesure π sur E est dite invariante pour la chaîne si

$$\forall j \in E,\ \pi(j) = \sum_{i \in E} \pi(i) P(i,j)\,.$$

On parle de probabilité invariante lorsque π est une probabilité.

Exemple 18. La mesure uniforme sur $\mathbb{Z}$ est invariante pour la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, mais il n'existe pas de probabilité invariante pour cette chaîne.

Proposition 20

Si P est irréductible, alors P admet au plus une probabilité invariante. Une telle probabilité π vérifie

$$\forall x \in E,\ \pi(x) > 0\,.$$

Théorème 5

Soit P irréductible. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe une (unique) probabilité invariante π.

(ii) l'unique probabilité invariante est $\pi : x \mapsto \frac{1}{\mathbb{E}(T_x)}$.

(iii) tous les états de la chaîne sont récurrents positifs.

(iv) il existe un état récurrent positif.

Théorème 6 (*Théorème ergodique*)

Soit P irréductible. Pour toute mesure initale ν,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{X_k = x} \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.} \frac{1}{\mathbb{E}(T_x)} = \pi(x)\,.$$

Si la chaîne est de plus récurrente positive, alors pour toute fonction bornée f sur E,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(X_k) \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.} \int_E f\, d\pi = \sum_{x \in E} \pi(x) f(x)\,.$$

Références

[1] Michel Benaïm and Nicole El Karoui. *Promenade aléatoire*.

[2] Marie Cottrell, Valentine Genon-Catalot, Christian Duhamel, and Thierry Meyre. *Exercices de probabilités*.

[3] Sylvie Méléard. *Introduction à la théorie et au calcul des probabilités*.

[4] James R. Norris. *Markov Chains*.

[5] Jean-Yves Ouvrard. *Probabilités 1*.

[6] Jean-Yves Ouvrard. *Probabilités 2*.