

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE RENNES

RAPPORT DE STAGE DE PREMIÈRE ANNÉE

Théorie de Morse

Rudy Morel

Stage effectué sous la direction de
Hélène Eynard-Bontemps
à l'Institut de Mathématiques de Jussieu.

Table des matières

Introduction	5
1 Fonctions de Morse sur les variétés	7
1.1 L'exemple du tore	7
1.2 Définition et existence de fonctions de Morse	9
1.3 Lemme de Morse	15
1.4 Déformation en l'absence de point critique et première application .	16
1.5 Passage d'une valeur critique	19
1.5.1 Attachement de cellule	19
1.5.2 Passage d'une valeur critique	20
1.6 Décomposition d'une variété en CW-complexe	23
2 Généralisation aux espaces de chemins	27
2.1 Notion de variation sur l'espace des chemins $\Omega(M, p, q)$	27
2.2 Fonction énergie E et chemins critiques	29
2.3 Étude de E en un chemin critique	31
2.3.1 Hessienne de E	31
2.3.2 Champs de Jacobi	34
2.4 Théorème de décomposition	37

Introduction

La théorie de Morse, du mathématicien américain Marston Morse (1892 - 1977), est un ensemble de résultats en topologie et géométrie différentielle. Elle relie la topologie d'une variété à l'étude des points critiques d'une fonction définie sur elle. L'objectif de mon stage a été d'étudier un livre de Milnor, (*Morse Theory*), représentant les principaux résultats de cette théorie. Pour cela, il m'a fallu apprendre, au cours de mon étude, des bases en géométrie différentielle et en géométrie Riemannienne. J'ai dû m'approprier des démonstrations parfois rédigées de manière assez concise par Milnor, m'interroger sur les applications que peuvent avoir un résultat et orienter mon étude du livre. Car j'ai préféré étudier l'aspect « différentiel » du propos de Milnor plutôt que l'aspect topologie algébrique, par préférence mais aussi car les parties assez algébriques demandent de connaître des notions en homologie et alourdissent les bases requises à l'étude complète du livre. Enfin, j'ai dû effectuer un résumé de mon travail, que constitue le présent rapport.

Ainsi, ce rapport est séparé en deux parties, comme l'a été mon stage. Dans un premier chapitre, nous traitons de la théorie de Morse dans le cas d'une variété M de dimension finie, nous démontrons un théorème sur le type d'homotopie de la variété. Dans un second chapitre nous étudions la théorie de Morse dans le cas d'un espace de chemins, en utilisant des outils de géométrie Riemannienne et en raisonnant par analogie avec le chapitre 1. Les bases de la géométrie différentielle vont de la définition de variété jusqu'au crochet de deux champs de vecteurs en passant par l'équivalence entre dérivation ponctuelle (resp. globale) et vecteur tangent (resp. champ de vecteurs). Les bases de géométrie riemannienne vont, elles, de la définition de métrique riemannienne jusqu'à la notion, très vaguement utilisée, de courbure sectionnelle en passant par la notion de géodésiques. Par soucis de ne pas dépasser le nombre de pages maximum, il m'est apparu plus pertinent d'inclure des dessins et schémas plutôt que de recopier des définitions classiques à un certain niveau. Ainsi, nous nous référons à deux livres avec lesquels les notations sont cohérentes ([Laf10] pour les bases en géométrie différentielle et [dC92] pour les bases en géométrie Riemannienne). Je me suis aussi servi de [MA10] pour l'existence de fonctions de Morse (cf section 1.2) et de [Fé10] pour des rudiments en homotopie et en attachement de cellule (cf sous-section 1.5.1).

Je tiens à remercier vivement ma tutrice, pour m'avoir proposé ce stage et pour l'avoir encadré, mais pas seulement. Elle a su se rendre disponible pour répondre à toutes mes questions aussi fréquemment que nécessaire. Ses explications ont souvent été à l'origine d'éclaircissements significatifs dans ma compréhension du sujet. Elle a aussi évoqué des sujets connexes à la théorie de Morse tout à fait intéressants. Enfin, je la remercie pour sa lecture, plus qu'attentive, des différentes versions de mon rapport. Je reste impressionné par le temps et le travail qu'elle a su me consacrer.

Chapitre 1

Fonctions de Morse sur les variétés

Dans tout ce chapitre on se donne une variété différentielle M de classe C^∞ , dite variété lisse. Il s'agit de montrer que M a le *type d'homotopie* d'un *CW-complexe*, c'est-à-dire d'un espace obtenu par *attachement de cellules* les unes aux autres. Pour cela, nous introduisons la notion de *fonction de Morse*. Étant donnée une telle fonction, on peut obtenir une décomposition par l'étude de ses points critiques.

1.1 L'exemple du tore

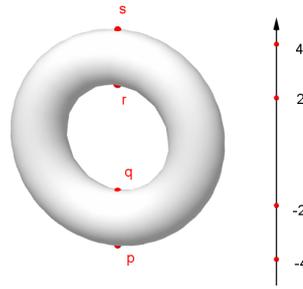
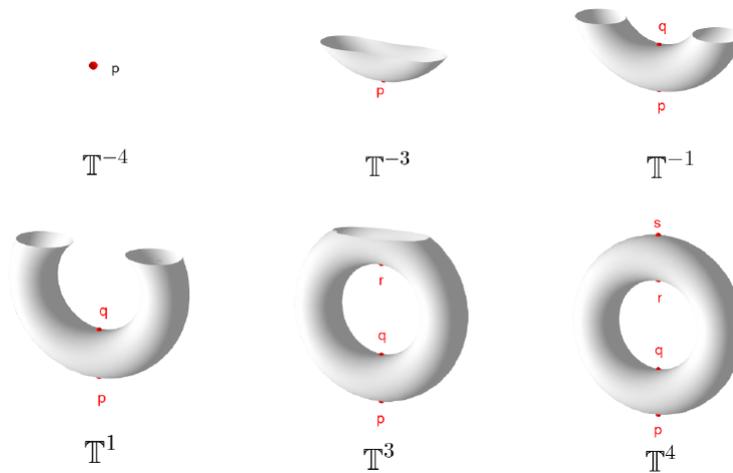
Illustrons dans le cas du tore la méthode générale que nous démontrerons plus tard. M est ici le tore de révolution autour d'un axe de l'espace, sous-variété lisse de dimension 2 de \mathbb{R}^3 , noté \mathbb{T} (cf figure 1.1). On a $\mathbb{T} = \psi(\mathbb{R}^2)$ où ψ est le paramétrage suivant :

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (\sin v, (3 - \cos v) \sin u, (3 - \cos v) \cos u). \end{aligned}$$

Considérons la fonction $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ qui à un point du tore associe sa hauteur (sa troisième coordonnée). Elle a exactement quatre points critiques, les points où l'espace tangent au tore est horizontal, c'est-à-dire constant en hauteur. Ce sont les points p, q, r et s de valeurs critiques respectives, $-4, -2, 2$ et 4 (cf figure 1.1).

Pour $z \geq -4$ intéressons-nous à l'ensemble des points de hauteur inférieure à z que l'on note $\mathbb{T}^z = \{ m \in \mathbb{T} \mid h(m) \leq z \}$.

On observe des similitudes à homéomorphisme près dans les espaces ci-dessus, on voit notamment que \mathbb{T}^1 peut être obtenu en étirant \mathbb{T}^{-1} vers le haut. Par contre, le passage de \mathbb{T}^{-3} à \mathbb{T}^{-1} n'est pas aussi simple. On constate que ces deux espaces

FIGURE 1.1 – Le tore et les quatre points critiques de h .FIGURE 1.2 – Divers sous-niveaux de h .

n'ont pas le même type d'homotopie. En fait le passage de l'un à l'autre en terme d'homotopie nécessite l'attachement d'un segment incurvé, homéomorphe à une *cellule de dimension un*, comme le montre la figure 1.3. Cet attachement d'une *cellule de dimension un* est nécessaire précisément au franchissement des points critiques q et r qui ne sont pas des points extrémaux comme p et s . Remarquons que l'on peut aussi passer de \mathbb{T}^{-3} à \mathbb{T}^{-1} directement en terme d'homéomorphisme en attachant une 1-anse $e^1 \times e^1$ le long de $\mathbb{S}^1 \times e^1$. Nous privilégierons dans la suite l'attachement de cellules, plus simple à formuler. Le passage de $\mathbb{T}^{-5} = \emptyset$ à \mathbb{T}^{-3} , lui, nécessite, toujours en terme d'homotopie, l'attachement d'une 0-cellule qui consiste à rajouter un point. Enfin, le passage de \mathbb{T}^3 à \mathbb{T} tout entier nécessite le recollement d'un disque déformé le long de son bord, ce qui correspond à l'attachement d'une *2-cellule*.

Justifions plus précisément ce qui vient d'être formulé, en commençant par le fait que \mathbb{T} est une variété. Notons $V_1 =]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[$, $V_2 =]0, 2\pi[\times]-\pi, \pi[$, $V_3 =]-\pi, \pi[\times]0, 2\pi[$.



FIGURE 1.3 – Deux espaces ayant même type d’homotopie

$\pi, \pi[\times]0, 2\pi[, V_4 =]-\pi, \pi[\times]-\pi, \pi[$ et $U_i = \psi(V_i)$ pour $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$. Les quatre ouverts U_1, U_2, U_3, U_4 recouvrent \mathbb{T} . Quelque soit $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, on peut vérifier que $\psi_i = \psi|_{V_i}^{U_i}$ est un homéomorphisme. De plus on vérifie que la condition de compatibilité lisse des cartes est vérifiée, les applications de transition sont ici des translations. Ainsi, \mathbb{T} muni de l’atlas $(U_i, \psi_i^{-1})_{1 \leq i \leq 4}$ est une variété lisse de dimension 2.

Remarquons que dans ces cartes, la fonction hauteur n’est autre que la troisième composante de $\psi : \forall (u, v) \in V_i, h \circ \psi_i(u, v) = (3 - \cos v) \cos u$. Le calcul de la jacobienne de h dans les différentes cartes justifie que h a 4 points critiques correspondant aux angles $(0, 0), (0, \pi), (\pi, 0)$ et (π, π) .

Comme nous le justifierons plus tard, il existe des cartes autour de q (et r) telles que h s’écrive localement :

$$\begin{aligned} (x, y) &\mapsto -2 + x^2 - y^2 && \text{au voisinage de } q \\ (x, y) &\mapsto 2 + x^2 - y^2 && \text{au voisinage de } r \end{aligned}$$

Alors qu’en p et s , h s’écrit localement :

$$\begin{aligned} (x, y) &\mapsto -4 + x^2 + y^2 && \text{au voisinage de } p \\ (x, y) &\mapsto 4 - x^2 - y^2 && \text{au voisinage de } s \end{aligned}$$

Nous voyons que le nombre de signes *moins* dans l’expression locale de h est égal à la dimension de la cellule à attacher. On peut donc présager du lien entre un point critique de h et son *indice* (cf paragraphe suivant) et la dimension de la cellule à attacher.

1.2 Définition et existence de fonctions de Morse

Comme dans le cas du tore, le travail de décomposition de M , variété lisse quelconque, part de l’étude des points critiques d’une certaine fonction f donnée. Pour le tore, cette fonction était la fonction hauteur h . Elle doit avoir des propriétés rendant son étude pertinente. En effet, comme l’incite la partie précédente,

nous allons travailler sur le passage d'un sous-niveau à l'autre autour d'une valeur critique c . Cependant, si cette valeur critique correspond à un point critique *dé-généré* (cf ci-dessous), alors on ne contrôle pas la ligne de niveau $f^{-1}(c)$ et on ne pourra pas dire grand chose.

Nous introduisons la notion de hessienne d'une fonction à valeurs réelles définie sur une variété. Nous procédons par analogie avec le cas de fonctions à plusieurs variables réelles. Soit $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ . La hessienne de g en $a \in \mathbb{R}^n$ vérifie pour $v = (v_1, \dots, v_n), w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$Hg(a)(v, w) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(a) v_i w_j$$

Alors :

$$\begin{aligned} Hg(a)(v, w) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n w_j \frac{\partial g}{\partial x_j} \right) (a) v_i \\ &= \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} (p \mapsto dg(p).w)(a) \\ &= \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\tilde{w}(g))(a) \\ &= \tilde{v}_a(\tilde{w}(g)) \end{aligned}$$

où \tilde{v} et \tilde{w} sont les champs de vecteurs constants égaux à v et w en a . Ce sont des champs qui "étendent" les vecteurs X et Y en champs de vecteurs.

C'est cette dernière expression que l'on reprend pour définir une notion de hessienne d'une fonction sur M , mais seulement en un point critique.

Proposition 1. *Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ . Soit $p \in M$ un point critique de f . Nous définissons la hessienne de f en p de la manière suivante. Pour $v, w \in T_p M$:*

$$Hf(p)(v, w) = \tilde{v}_p(\tilde{w}(f))$$

où \tilde{v} et \tilde{w} sont des champs de vecteurs sur un voisinage de p qui valent respectivement v et w en p .

La fonction $Hf(p) : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ est bien définie et c'est une forme bilinéaire symétrique.

Preuve. D'abord on a par définition $T_p f = 0$, alors,

$$\tilde{v}_p(\tilde{w}(f)) - \tilde{w}_p(\tilde{v}(f)) = (\tilde{v}(\tilde{w}(f)) - \tilde{w}(\tilde{v}(f)))(p) = ([\tilde{v}, \tilde{w}](f))(p) = [\tilde{v}, \tilde{w}]_p(f) = 0.$$

Donc, si $Hf(p)$ est bien définie, elle est symétrique.

Justifions la bonne définition. On a : $\tilde{v}_p(\tilde{w}(f)) = v(\tilde{w}(f))$. Ainsi, $\tilde{v}_p(\tilde{w}(f))$ ne dépend pas de l'extension de v choisie. De même, $\tilde{w}_p(\tilde{v}(f))$ ne dépend pas de l'extension de w choisie. Or, $\tilde{v}_p(\tilde{w}(f)) = \tilde{w}_p(\tilde{v}(f))$ donc, $Hf(p)(v, w) = \tilde{v}_p(\tilde{w}(f)) = \tilde{w}_p(\tilde{v}(f))$ ne dépend ni de l'extension de v choisie ni de l'extension de w choisie. La bilinéarité se démontre facilement. \square

Remarque 1. *On peut obtenir une matrice représentative de $Hf(p)$ dans une certaine base. Soit $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ une carte de M avec $p \in U$ vérifiant $\varphi(p) = 0$.*

Pour $v, w \in T_pM$, on écrit $v = \sum_{i=1}^n a_i \partial_{i|p}$ et $w = \sum_{j=1}^n b_j \partial_{j|p}$. On peut prendre pour extensions de ces vecteurs $\tilde{v} = \sum_{i=1}^n a_i \partial_i$ et $\tilde{w} = \sum_{i=1}^n b_i \partial_i$. Alors

$$\begin{aligned} Hf(p)(v, w) &= \tilde{v}_p(\tilde{w}(f)) = (\tilde{v}(\tilde{w}(f)))(p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j \partial_i(\partial_j(f))(p) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j \frac{\partial^2 f(\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i \partial x_j}(0). \end{aligned}$$

La matrice de $Hf(p) : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ dans la base $(\partial_{1|p}, \dots, \partial_{n|p})$ est donc $(\frac{\partial^2(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i \partial x_j}(0))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$.

Définition 1. *Un point critique $p \in M$ d'une fonction lisse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est dit non-dégénéré si la forme quadratique associée à $Hf(p)$ est non-dégénérée.*

L'indice du point critique p est l'indice de cette forme quadratique, c'est-à-dire le nombre de -1 dans sa réduction de Gauss.

Nous pouvons alors définir les propriétés qu'auront les fonctions dont nous nous servons pour décomposer M :

Définition 2. *Une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est dite fonction de Morse si elle est de classe C^∞ et si tous ses points critiques sont non-dégénérés.*

La condition de non-dégénérescence des points critiques de f est nécessaire pour appliquer le lemme de Morse qui est un lemme élémentaire déterminant la géométrie des lignes de niveau au voisinage d'un point critique et qui nous servira par la suite.

Il s'agit maintenant de justifier l'existence de telles fonctions sur M . Si M était une sous-variété de \mathbb{R}^k pour un $k \in \mathbb{N}$, une idée serait de considérer les fonctions $f_p : M \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x - p\|^2$ pour $p \in \mathbb{R}^k$. Ces fonctions sont C^∞ , cependant pour certains p dans \mathbb{R}^k , f_p peut avoir un point critique dégénéré comme la figure 1.4 le montre.

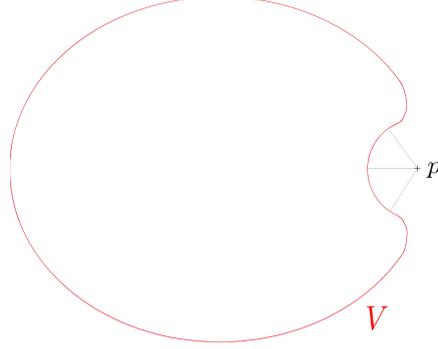


FIGURE 1.4 – Exemple de variété de dimension 1 de \mathbb{R}^2 où f_p n'est pas de Morse

On peut intuitiver qu'une sous-variété de \mathbb{R}^k n'a pas une infinité continue de ces cavités sphériques. Et il suffit donc de prendre un point p qui n'est pas le centre d'une de ces cavités. C'est ce que nous allons justifier.

Revenons dans le cas général, M est une variété quelconque de dimension n pour $n \in \mathbb{N}$. Justifions que l'on peut voir M comme une sous-variété de \mathbb{R}^{2n+1} grâce à ce théorème dont une preuve se trouve dans [Pos90].

Théorème 1 (de Whitney). *M se plonge dans \mathbb{R}^{2n+1} , c'est à dire qu'il existe $i : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ qui est un difféomorphisme lisse de M sur $i(M)$.*

L'image $i(M)$ est alors une sous-variété de \mathbb{R}^{2n+1} . Notons $V = i(M)$ et $m = 2n + 1$. On peut montrer qu'une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est de Morse si et seulement si $f \circ i^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}$ est de Morse. Donc, le cas général se ramène au cas particulier des sous-variétés, auquel nous nous restreignons maintenant.

Proposition 2. *Étant donnée une sous-variété V de \mathbb{R}^k , pour presque tout $p \in \mathbb{R}^k$ f_p est une fonction de Morse.*

La fin du paragraphe est consacrée à la preuve de cette proposition.

Nous commençons par caractériser les couples (p, a) où a est un point critique dégénéré de f_p :

Lemme 1. *Soit $a \in V$ et $x : (u_1, \dots, u_n) \mapsto x(u_1, \dots, u_n)$ un paramétrage local de V en a vérifiant $x(0) = a$. Alors, a est un point critique dégénéré de f_p si et seulement si $a - p \in T_a V^\perp$ et la matrice*

$$\frac{\partial^2(f_p \circ x)}{\partial u_i \partial u_j}(0) = 2 \left(\frac{\partial x}{\partial u_i}(0) \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j}(0) + (a - p) \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}(0) \right), \quad i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

est non-inversible.

Preuve. Pour $v \in T_a V \subset \mathbb{R}^m$ on a : $T_a(f_p)(v) = 2 v \cdot (a - p)$. Donc, a est un point critique de f_p si et seulement si $a - p \in T_a V^\perp$.

De plus, pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a :

$$\frac{\partial(f_p \circ x)}{\partial u_j} = 2 (x - p) \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j}$$

donc :

$$\frac{\partial^2(f_p \circ x)}{\partial u_i \partial u_j}(0) = 2 \left(\frac{\partial x}{\partial u_i}(0) \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j}(0) + (x(0) - p) \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}(0) \right)$$

On conclut grâce à la remarque 1. □

On sait maintenant quand, pour un p donné, f_p admet un point critique dégénéré a . Il s'agit de vérifier que pour la plupart des p , cette situation ne se produit pas. Pour cela, nous introduisons E , une application définie sur N , le fibré normal de V dans \mathbb{R}^m , par :

$$\begin{aligned} E : N &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ (q, v) &\mapsto q + v \end{aligned}$$

dont les points critiques correspondent aux points critiques des applications f_p au sens du lemme suivant.

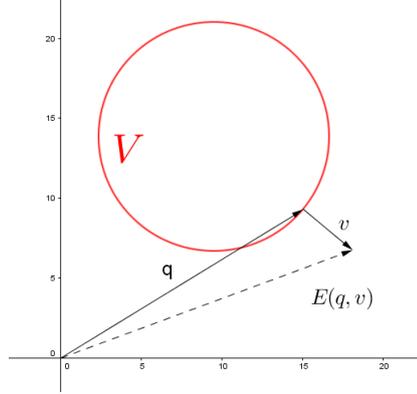


FIGURE 1.5 – L'application E

Lemme 2. Le point $(a, v) \in N$ est un point critique de E si et seulement si la matrice :

$$2 \left(\frac{\partial x}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j} - v \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} \right) (0), \quad i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

n'est pas inversible, où $x : (u_1, \dots, u_n) \mapsto x(u_1, \dots, u_n)$ est un paramétrage local en $a \in V$, c'est-à-dire si et seulement si a est un point critique dégénéré de f_{a+v} d'après le lemme précédent.

Preuve. Donnons-nous $m-n$ applications $v_i : (u_1, \dots, u_n) \mapsto v_i(u_1, \dots, u_n)$ telles que pour tout u proche de 0, $(v_1(x(u)), \dots, v_{m-n}(x(u)))$ forme une base orthonormée de $T_{x(u)}V^\perp$. Alors, l'application y suivante donne un paramétrage local de N en $(a, 0)$:

$$y : \quad W \times \mathbb{R}^{m-n} \quad \rightarrow \quad N \\ (u_1, \dots, u_n, t_1, \dots, t_{m-n}) \mapsto \left(x(u_1, \dots, u_n), \sum_{i=1}^{m-n} t_i v_i(u_1, \dots, u_n) \right)$$

où $W \subset \mathbb{R}^n$ est l'ouvert de définition de x .

On a : $E \circ y = x + \sum_{i=1}^{m-n} t_i v_i$. Ainsi :

$$\frac{\partial E}{\partial u_i} = \frac{\partial x}{\partial u_i} + \sum_{k=1}^{m-n} t_k \frac{\partial v_k}{\partial u_i} \quad \text{et} \quad \frac{\partial E}{\partial t_i} = v_i.$$

Il s'agit d'étudier l'inversibilité de $B = J(E \circ y)(0, \dots, 0, t_1^\circ, \dots, t_{m-n}^\circ) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ où $t_1^\circ, \dots, t_{m-n}^\circ$ sont les coordonnées de v dans la base $(v_0(0), \dots, v_{m-n}(0))$ de $T_a V^\perp$. Autrement dit, $(0, \dots, 0, t_1^\circ, \dots, t_{m-n}^\circ) = y^{-1}(a, v)$. On pose

$$A = \left[\frac{\partial x}{\partial u_1}(0) \mid \dots \mid \frac{\partial x}{\partial u_n}(0) \mid v_1(0) \mid \dots \mid v_{m-n}(0) \right].$$

La matrice A est inversible car les $\frac{\partial x}{\partial u_i}(0)$ engendrent $T_a V$ et les $v_i(0)$ engendrent $(T_a V)^\perp$. Cela revient donc à étudier l'inversibilité de la matrice BA . Or celle-ci fait justement intervenir des produits scalaires

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial(E \circ y)}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j} & \frac{\partial(E \circ y)}{\partial u_i} \cdot v_j \\ \frac{\partial(E \circ y)}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j} & \frac{\partial(E \circ y)}{\partial t_i} \cdot v_j \end{bmatrix} (0, \dots, 0, t_1^\circ, \dots, t_{m-n}^\circ)$$

où dans chacun des quatre blocs, i varie dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ et j varie dans $\llbracket 1, m-n \rrbracket$.

En simplifiant il vient :

$$BA = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j} + \sum_{k=1}^{m-n} t_k^\circ \frac{\partial v_k}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j} & \sum_{k=1}^{m-n} t_k^\circ \frac{\partial v_k}{\partial u_i} \cdot v_j \\ 0 & Id \end{bmatrix}.$$

On peut alors dire que (a, p) est un point critique de E si et seulement si la matrice $(\frac{\partial x}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j} + \sum_{k=1}^{m-n} t_k^\circ \frac{\partial v_k}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est non-inversible. Or, puisque v_k est orthogonal à $\frac{\partial x}{\partial u_j}$ on a $\frac{\partial}{\partial u_j}(v_k \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j}) = \frac{\partial v_k}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j} + v_k \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} = 0$. Donc $\sum_{k=1}^{m-n} t_k^\circ \frac{\partial v_k}{\partial u_i}(0) \cdot v_j(0) = (\sum_{k=1}^{m-n} t_k^\circ v_k(0)) \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}(0) = v \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}(0)$, ce qui achève la démonstration. \square

Alors, pour $p \in \mathbb{R}^m$, nous avons les équivalences suivantes :

p n'est pas une valeur critique de E
 \iff quelque soit $a \in V$, si $(a, p - a) \in N$, alors $(a, p - a)$ n'est pas un point critique de E
 \iff pour tout $a \in V$, si $(p - a) \in T_a V^\perp$ alors $(a, p - a)$ n'est pas un point critique de E
 $\iff f_p$ est une fonction de Morse.

Si $p \in \mathbb{R}^m$ est une valeur critique de E alors f_p n'est pas une fonction de Morse.

Ainsi on a le théorème final de cette section.

Théorème 2 (multiplicité des fonctions de Morse). *Pour presque tout p , la fonction $f_p : V \rightarrow \mathbb{R}$ est de Morse.*

$$x \mapsto \|x - p\|^2$$

La démonstration découle du théorème suivant, dont une preuve est dans [Pos90].

Théorème 3 (Sard). *Soient X une variété lisse et $f : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ une application lisse, pour $k \in \mathbb{N}$. Alors, l'ensemble des valeurs critiques de f est de mesure de Lebesgue nulle.*

Remarque 2. *Il existe des résultats d'approximation de fonctions par des fonctions de Morse non présentés ici.*

Maintenant que l'existence de fonctions de Morse est démontrée, nous considérons jusqu'à la fin de ce chapitre une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de Morse. Nous notons pour $r \in \mathbb{R}$, $M^r = \{q \in M \mid f(q) \leq r\}$, ce sont les sous-niveaux de M . Au vu de cette section, M^r peut être pris compact quelque soit $r \in \mathbb{R}$, ce que nous faisons.

1.3 Lemme de Morse

Le lemme de Morse permet de décrire localement autour d'un point critique de f la géométrie des lignes de niveau de f . Il établit un premier lien, certes local, entre point critique d'une fonction et description de la variété.

Lemme 3 (Morse). *Soit $p \in M$ un point critique de f d'indice $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Alors il existe un système de coordonnées local $(x_1, \dots, x_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui s'annule en p où U est un ouvert de M contenant p tel que :*

$$\forall q \in U, f(q) = f(p) - x_1(q)^2 - \dots - x_k(q)^2 + x_{k+1}(q)^2 + \dots + x_n(q)^2.$$

Preuve. Soit V un ouvert de carte contenant p et $\phi : V \rightarrow \phi(V)$ la carte correspondante. Alors, $f \circ \phi^{-1} : U \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞ . Elle admet $\phi(p)$ comme point critique non-dégénéré d'indice k . Il suffit alors d'appliquer le lemme de Morse dans le cas \mathbb{R}^n . \square

Remarque 3. Une conséquence de ce lemme est que les points critiques de f sont isolés dans M . Aussi, nous déduisons rapidement que si f a un minimum en p (resp. un maximum) alors $M^{c+\epsilon}$ (resp. $f^{-1}([c-\epsilon, c])$), où $c = f(p)$, est homéomorphe à la boule unité de \mathbb{R}^n , pour $\epsilon > 0$ assez petit.

Par exemple, si l'on a une variété de dimension deux et un point critique de f d'indice 1, comme c'était le cas pour les points q et r du tore (cf 1.1), d'après le lemme de Morse, f s'écrit localement

$$f = c - x_1^2 + x_2^2 .$$

Ainsi, les lignes de niveau de f sur M sont homéomorphes aux lignes de niveau sur le graphe suivant.

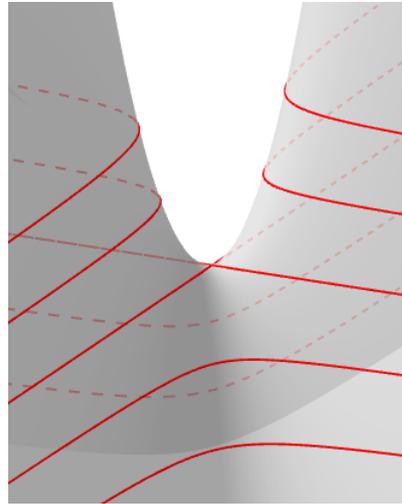


FIGURE 1.6 – Lignes de niveaux (en rouge) dans le cas $(n, k) = (1, 1)$.

1.4 Déformation en l'absence de point critique et première application

Lemme 4. Soient $a < b$ dans \mathbb{R} . Si $f^{-1}([a, b])$ ne contient aucun point critique alors M^a est difféomorphe à M^b . De plus, M^a est un rétracte par déformation de M^b .

Preuve. Nous nous donnons une métrique riemannienne sur M (cf chapitre 2). Cela nous permet de parler du champ de vecteur gradient de f noté ∇f . L'idée est d'étirer M^a vers M^b en utilisant le champ gradient de f . D'abord, M^b étant

compact, $f^{-1}([a, b])$ l'est aussi. Donnons-nous une fonction plateau $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$ qui vaut $\frac{1}{\|\nabla f\|^2}$ sur le compact $f^{-1}([a, b])$ et qui est nulle en dehors d'un ouvert le contenant. Une telle fonction existe notamment car ∇f ne s'annule pas sur $f^{-1}([a, b])$. Considérons alors le champ de vecteurs X défini par

$$\forall q \in M, X_q = \rho(q)(\nabla f)_q.$$

C'est un champ de vecteurs à support compact. D'après le théorème classique des équations différentielles, il engendre alors un groupe à un paramètre de difféomorphismes de M . C'est-à-dire qu'il existe une famille de difféomorphismes $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ telle que pour tous $t, s \in \mathbb{R}$, $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ (condition de groupe) et pour tout $q \in M, \forall t \in \mathbb{R}, \frac{d\varphi_t(q)}{dt} = X_{\varphi_t(q)}$. C'est ce champ X qui permet d'étirer M^a vers M^b . Pour $q \in M$, tant que $\varphi_t(q)$ est dans $f^{-1}([a, b])$, on a

$$\frac{df(\varphi_t(q))}{dt} = \left\langle \frac{d\varphi_t(q)}{dt}, (\nabla f)_{\varphi_t(q)} \right\rangle = \left\langle X_{\varphi_t(q)}, (\nabla f)_{\varphi_t(q)} \right\rangle = 1.$$

Ainsi, tant que $\varphi_t(q)$ est dans $f^{-1}([a, b])$, la quantité $f(\varphi_t(q))$ croît linéairement en t . On vérifie facilement que $\varphi_{b-a} : M^a \rightarrow M^b$ est le difféomorphisme souhaité.

Pour le caractère de rétracte par déformation, définissons la famille d'applications $(r_t)_{t \in [0,1]}$:

$$r_t : M^b \rightarrow M^b$$

$$q \mapsto \begin{cases} q & \text{si } q \in M^a \\ \varphi_{t(a-f(q))}(q) & \text{si } q \in f^{-1}([a, b]) \end{cases}.$$

Il suffit alors de montrer qu'elle vérifie les propriétés suivantes :

- $r_0 = id$
- $r_1(M^b) \subset M^a$
- $(t, q) \mapsto r_t(q)$ est continue,

ce qui est immédiat. □

Une application de ce résultat et du lemme de Morse est le théorème de Reeb.

Théorème 4 (Reeb). *Si on suppose M compacte et si f a exactement deux points critiques alors M est homéomorphe à la sphère \mathbb{S}^n .*

Preuve. Puisque M est compacte, f admet un minimum et un maximum, que l'on suppose atteints respectivement en p et q . Sans restreindre la généralité, supposons $f(M) = [0, 1]$. En appliquant le lemme de Morse en ces deux points, il existe $\epsilon > 0$ tel que l'on a deux difféomorphismes $\varphi_p : M^\epsilon \rightarrow e^n$ et $\varphi_q : f^{-1}([1 - \epsilon, 1]) \rightarrow e^n$. Or, f n'a pas de point critique dans $f^{-1}([\epsilon, 1 - \epsilon])$ et cet ensemble est compact donc on sait que M^ϵ est difféomorphe à $M^{1-\epsilon}$ par le lemme précédent. Alors,

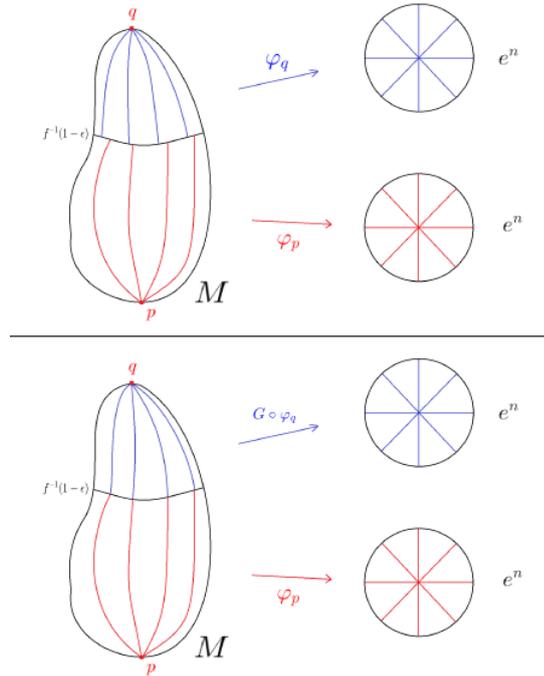


FIGURE 1.7 – La fonction G permet le recollement continue des deux boules selon leur bord.

quitte à composer φ_p par ce difféomorphisme, on peut supposer que φ_p est un difféomorphisme de $M^{1-\epsilon}$ dans e^n .

Il s'agit maintenant de recoller ces deux boules correctement le long de leur bord. Les deux difféomorphismes φ_p et φ_q n'ont rien à voir, de sorte qu'il ne se recolle pas forcément bien en $f^{-1}(1-\epsilon)$. Pour que ce soit le cas, on modifie φ_p . Posons $g = (\varphi_p \circ \varphi_q^{-1})|_{\mathbb{S}^{n-1}}$. Par définition, g est un difféomorphisme de \mathbb{S}^{n-1} dans lui-même. De sorte qu'on peut l'étendre radialement sur e^n en homéomorphisme G :

$$G : e^n \rightarrow e^n$$

$$x \mapsto \begin{cases} \|x\|g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Définissons maintenant la fonction h suivante :

$$h : M \rightarrow \mathbb{S}^n$$

$$m \mapsto \begin{cases} (u_1, \dots, u_n, \sqrt{1 - u_1^2 - \dots - u_n^2}) & \text{si } m \in f^{-1}([1-\epsilon, 1]) \\ & \text{où } (u_1, \dots, u_n) = G(\varphi_q(m)) \\ (u_1, \dots, u_n, -\sqrt{1 - u_1^2 - \dots - u_n^2}) & \text{si } m \in M^{1-\epsilon} \text{ où } (u_1, \dots, u_n) = \varphi_q(m) \end{cases} .$$

La fonction h est bien définie, car si $m \in f^{-1}(1 - \epsilon)$ alors, $G(\varphi_q(m)) = g(\varphi_q(m)) = \varphi_p(m)$ ainsi les deux définitions coïncident. De plus, h est continue sur les deux fermés $f^{-1}([1 - \epsilon, 1])$ et $M^{1-\epsilon}$ ce qui assure la continuité globale de h . La fonction h est une bijection car on peut facilement exhiber son inverse qui est de plus continu. On en déduit que h est un homéomorphisme. \square

1.5 Passage d'une valeur critique

1.5.1 Attachement de cellule

Nous définissons la notion d'attachement de cellule, comme elle a été intuitivement présentée dans l'exemple du tore pour des cellules de dimensions 0, 1 ou 2. Prenons un espace topologique X . On se donne n dans \mathbb{N} . On note e^n la boule unité fermée de \mathbb{R}^n et on se donne une application d'attachement $\varphi : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X$ continue qui indique l'endroit sur X où est attaché le bord de e^n . Pour effectuer cet attachement, on définit la relation \mathcal{R} sur $X \amalg e^n$, l'espace topologique somme de X et e^n , comme la plus petite relation d'équivalence contenant les couples $(x, \varphi(x))$ pour $x \in \mathbb{S}^{n-1} \subset X \amalg e^n$.

Définition 3. L'espace $X \cup_{\varphi} e^n$ obtenu en attachant à X une n -cellule selon φ est l'espace topologique quotient : $X \cup_{\varphi} e^n = X \amalg e^n / \mathcal{R}$.



FIGURE 1.8 – Attachement d'une 2-cellule

Voici deux lemmes de base sur l'attachement cellulaire permettant de manier cette notion.

Lemme 5. Soient φ_0 et φ_1 deux applications de \mathbb{S}^{n-1} dans X . Si ces applications sont homotopes alors les espaces $X \cup_{\varphi_0} e^n$ et $X \cup_{\varphi_1} e^n$ ont même type d'homotopie.

Lemme 6. Soit Y un autre espace topologique. Si il existe une application $f : X \rightarrow Y$ qui est une équivalence d'homotopie alors les espaces $X \cup_{\varphi} e^n$ et $Y \cup_{f \circ \varphi} e^n$ ont même type d'homotopie.

1.5.2 Passage d'une valeur critique

Voici le lemme fondamental sur le passage d'un point critique de f .

Lemme 7. *Soit p un point critique de f d'indice $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $c = f(p)$. Si il existe un $\epsilon_0 > 0$ tel que $f^{-1}([c - \epsilon_0, c + \epsilon_0])$ ne contienne que p comme point critique alors quelque soit $\epsilon > 0$ assez petit, $M^{c+\epsilon}$ a le même type d'homotopie que $M^{c-\epsilon}$ avec une k -cellule attachée.*

Preuve. L'idée de la preuve est de construire une fonction auxiliaire $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ « proche » de f dont le sous-niveau $M^{c-\epsilon}$ est celui de f auquel on ajoute une partie autour de p . On montre ensuite à l'aide de F que $M^{c+\epsilon}$ se rétracte en $F^{-1}(]-\infty, c - \epsilon])$ et que la petite partie ajoutée se rétracte en une k -cellule. Dans le cas du tore, f est la fonction hauteur et la figure 1.9 schématise la méthode.

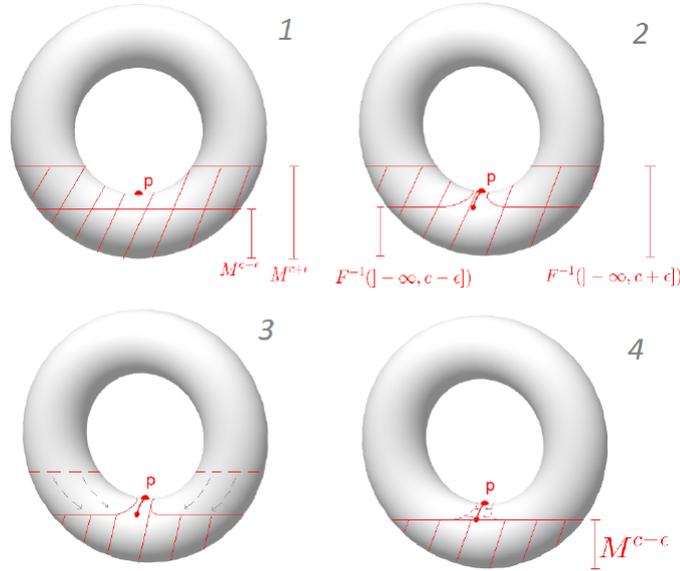


FIGURE 1.9 – Les étapes dans le cas du tore. 1 \rightarrow 2 Passage aux sous-niveaux de F . 2 \rightarrow 3 Première déformation. 3 \rightarrow 4 Seconde déformation.

La première étape consiste à construire F . Soit $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ une carte donnée par le lemme de Morse en p :

$$\forall q \in U, f(q) = c - u_1^2 - \dots - u_k^2 + u_{k+1}^2 + \dots + u_n^2 \text{ où } (u_1, \dots, u_n) = \varphi(q).$$

Puisque $\varphi(U)$ est ouvert et $0 \in \varphi(U)$, il existe $\epsilon_1 > 0$ tel que $B(0, \sqrt{2\epsilon_1}) \subset \varphi(U)$.

A partir de maintenant, on raisonne avec $\epsilon \in]0, \min(\epsilon_0, \epsilon_1)[$.

Attachons e^k au passage. On pose $E^k = \varphi^{-1}(\{(u_1, \dots, u_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \mid u_1^2 + \dots + u_k^2 \leq \epsilon\})$.

Remarquons que la topologie sur U est métrisable par $d : (x, y) \mapsto |\varphi(x) - \varphi(y)|$ de telle sorte que deux points de U sont proches si et seulement si ils sont proches en coordonnées. Ainsi on peut facilement montrer que $\partial E^k = E^k \cap M^{c-\epsilon}$. E^k est bien *attachée* à $M^{c-\epsilon}$. Dans le cas du tore on a la figure 1.10.

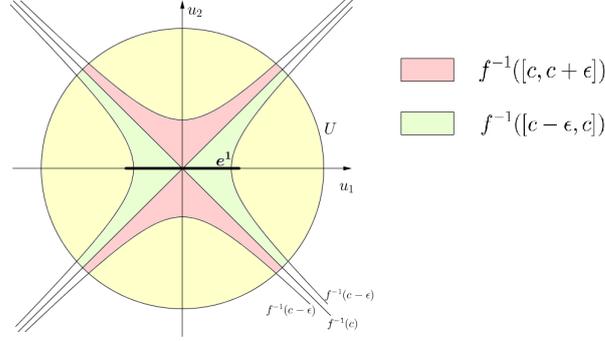


FIGURE 1.10 – Vue de dessus de la zone du point critique p .

On écrit f sous la forme $f = c - \xi + \eta$ où $\xi, \eta : U \rightarrow \mathbb{R}$ sont les fonctions lisses

$$\xi : \begin{array}{ccc} U & \rightarrow & \mathbb{R} \\ q = \varphi^{-1}(u_1, \dots, u_n) & \mapsto & u_1^2 + \dots + u_k^2 \end{array} \quad \text{et} \quad \eta : \begin{array}{ccc} U & \rightarrow & \mathbb{R} \\ q = \varphi^{-1}(u_1, \dots, u_n) & \mapsto & u_{k+1}^2 + \dots + u_n^2 \end{array}$$

Prenons une fonction lisse $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec les propriétés suivantes :

- $\mu(0) > \epsilon$
- $\forall x \geq 2\epsilon, \mu(x) = 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}, -1 < \mu'(x) < 0$

On pose alors $F = f - \mu(\xi + 2\eta)$ sur U . On peut définir F sur M de manière cohérente en posant $F = f$ en dehors de U . F est lisse sur U et sur $M \setminus \varphi^{-1}(\bar{B}(0, \sqrt{2\epsilon}))$ ouvert où $F = f$. Or, U et $M \setminus \varphi^{-1}(\bar{B}(0, \sqrt{2\epsilon}))$ forment un recouvrement ouvert de M donc F est lisse sur M tout entière. Vérifions que F a les propriétés voulues.

- D'abord, $F \leq f$ donc les sous-niveaux de F sont plus « hauts » que ceux de f dans le sens où : $\forall r \in \mathbb{R}, f^{-1}(]-\infty, r]) \subset F^{-1}(]-\infty, r])$.
- F et f coïncident en dehors de U , le voisinage de p dans lequel on a attaché E^k , car $\varphi^{-1}(\bar{B}(0, \sqrt{2\epsilon})) \subset E^k$
- On a $M^{c+\epsilon} = F^{-1}(]-\infty, c+\epsilon])$. En effet, pour $q \in M$, si $(\xi + 2\eta)(q) > 2\epsilon$ alors $f(q) = F(q)$, sinon, on a $F(q) \leq f(q) = c - \xi(q) + \eta(q) \leq c + \frac{1}{2}\xi(q) + \eta(q) \leq c + \frac{1}{2}(2\epsilon) = c + \epsilon$ donc $q \in M \cap F^{-1}(]-\infty, c+\epsilon])$. Par disjonction de cas, on a bien montré que pour $x \in M, q \in M^{c+\epsilon} \iff q \in F^{-1}(]-\infty, c+\epsilon])$.
- Puisque $F \leq f$ on a : $F^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon]) = F^{-1}([c-\epsilon, +\infty[) \cap F^{-1}(]-\infty, c+\epsilon]) = F^{-1}([c-\epsilon, +\infty[) \cap f^{-1}(]-\infty, c+\epsilon]) \subset f^{-1}([c-\epsilon, +\infty[) \cap f^{-1}(]-\infty, c+\epsilon]) = f^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon])$ Ainsi, $F^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon])$ est compact en tant que fermé du compact $f^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon])$.

- F et f ont les mêmes points critiques. En effet, sur l'ouvert $M \setminus \varphi^{-1}(\bar{B}(0, \sqrt{2\epsilon}))$, F et f coïncident donc elles ont les mêmes points critiques. Sur l'ouvert U (qui contient $\varphi^{-1}(\bar{B}(0, \sqrt{2\epsilon}))$), F n'a d'autre point critique que p . En effet, la fonction $F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ a pour gradient en $(u_1, \dots, u_n) : \nabla(F \circ \varphi^{-1})(u_1, \dots, u_n) = (-2u_1 - 2u_1\mu'(u_1^2 + \dots + 2u_n^2), \dots, 2u_n - 4u_n\mu'(u_1^2 + \dots + 2u_n^2))$. Comme, $-1 < \mu' \leq 0$, le gradient s'annule si et seulement si $u_1 = \dots = u_n = 0$. Il s'annule donc uniquement en $\varphi(p)$. On en déduit que $F^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon])$ a au plus un point critique, p . Or, $p \notin F^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon])$ car $F(p) = c - \mu(0) < c - \epsilon$, donc $F^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon])$ ne contient pas de point critique (pour F).
- On a $E^k \subset F^{-1}(]-\infty, c - \epsilon])$. En effet, par inégalité des accroissements finis $\forall q \in U, |\mu(\xi(q)) - \mu(0)| \leq \xi(q)$ donc $\mu(\xi(q)) > -\xi(q) + \epsilon$ et pour $q \in E^k, F(q) = c - \xi(q) - \mu(\xi(q)) < c - \epsilon$. On peut donc vouloir rétracter $F^{-1}(]-\infty, c - \epsilon])$ sur $M^{c-\epsilon} \cup E^k \subset F^{-1}(]-\infty, c - \epsilon])$.

On pose $H = \overline{F^{-1}(]-\infty, c - \epsilon])} \setminus M^{c-\epsilon}$, on a clairement $M^{c-\epsilon} \cup H = F^{-1}(]-\infty, c - \epsilon])$.

Dans une seconde étape, on effectue les déformations annoncées. D'abord, F vérifie les conditions du premier lemme, ce qui permet de dire que $F^{-1}(]-\infty, c - \epsilon])$ est un rétracte par déformation de $F^{-1}(]-\infty, c + \epsilon]) = M^{c+\epsilon}$. En particulier, $M^{c-\epsilon}$ a même type d'homotopie que $M^{c-\epsilon} \cup H$. On rétracte ensuite $M^{c-\epsilon} \cup H$ sur $M^{c-\epsilon} \cup E^k$ de la manière suivante (cf figure). On définit la famille d'applications $(r_t)_{t \in [0,1]}$ par :

$$r_t : \quad M^{c-\epsilon} \cup H \quad \rightarrow \quad M^{c-\epsilon} \cup H$$

$$q = \varphi^{-1}(u_1, \dots, u_n) \mapsto \begin{cases} \varphi^{-1}(u_1, \dots, u_k, tu_{k+1}, \dots, tu_n) & \text{si } \xi(q) \leq \epsilon \\ \varphi^{-1}(u_1, \dots, u_k, s_t u_{k+1}, \dots, s_t u_n) & \text{si } \epsilon \leq \xi(q) \leq \eta(q) + \epsilon \\ q & \text{si } \eta(q) + \epsilon \leq \xi(q) \quad (q \in M^{c-\epsilon}) \end{cases}$$

où $s_t = t + (1-t)\sqrt{\frac{\xi-\epsilon}{\eta}}$.

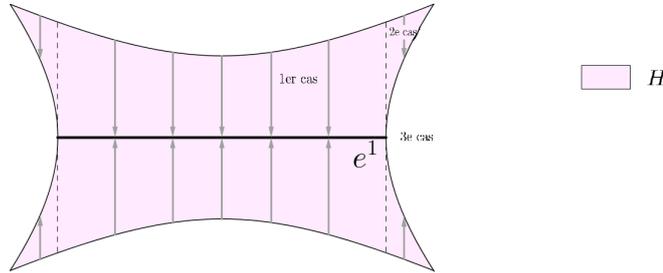


FIGURE 1.11 – Rétraction de $M^{c-\epsilon} \cup H$ sur $M^{c-\epsilon} \cup e^k$.

On vérifie que $(r_t)_{t \in [0,1]}$ a les propriétés voulues (propriétés déjà décrites dans une preuve précédente). Ainsi, $M^{c-\epsilon} \cup E^k$ est un rétracte par déformation de $M^{c-\epsilon} \cup H$ et par conséquent, ces deux espaces ont même type d'homotopie.

Ces deux déformations permettent de conclure que $M^{c+\epsilon}$ a le même type d'homotopie que $M^{c-\epsilon} \cup E^k$.

La preuve n'est pas tout à fait terminée, il faut vérifier que $M^{c-\epsilon} \cup E^k$ qui est obtenu par « attachement naturel » de E^k sur $M^{c-\epsilon}$ est effectivement homéomorphe à $M^{c-\epsilon}$ auquel on attache une k -cellule e^k au sens de la sous-section 1.5.1. Il s'agit de montrer que l'application \bar{g} obtenue par passage au quotient de l'application g suivante :

$$g : M^{c-\epsilon} \amalg e^k \rightarrow M^{c-\epsilon} \cup E^k$$

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in M^{c-\epsilon} \\ \varphi^{-1}(x, 0, \dots, 0) & \text{sinon} \end{cases} .$$

est bien un homéomorphisme entre $M^{c-\epsilon} \cup_{\phi} e^k$ et $M^{c-\epsilon} \cup E^k$, où $\phi : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow M^{c-\epsilon}$, $x \mapsto \varphi^{-1}(x, 0, \dots, 0)$, (on parle du passage au quotient pour la relation d'équivalence sur $M^{c-\epsilon} \amalg e^k$, cf 1.5.1). La démonstration de ce fait est élémentaire mais assez longue, elle n'est pas présentée. \square

Remarque 4. *Si un nombre fini de points critiques correspondent à une même valeur critique, on a juste à attacher plusieurs cellules de dimension l'indice du point critique correspondant.*

Remarque 5. *La preuve de ce théorème peut être adaptée pour montrer qu'en terme d'homéomorphisme et non d'homotopie, $M^{c+\epsilon}$ est homéomorphe à $M^{c-\epsilon}$ auquel on attache une k -anse $e^k \times e^{n-k}$ le long de $\mathbb{S}^{k-1} \times e^{n-k}$.*

1.6 Décomposition d'une variété en CW-complexe

Un CW-complexe est un espace topologique obtenu par attachement de cellules les unes aux autres.

Définition 4. *Un espace topologique X admet une structure de CW-complexe si il existe une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'espaces topologiques vérifiant :*

1. X_0 est un espace discret,
2. pour $n \geq 1$, X_n est obtenu à partir de X_n en recollant des cellules de dimension n sur X_{n-1} ,
3. X est l'union topologique de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, c'est à dire : $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ et un sous-ensemble F de X est fermé si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F \cap X_n$ est fermé.

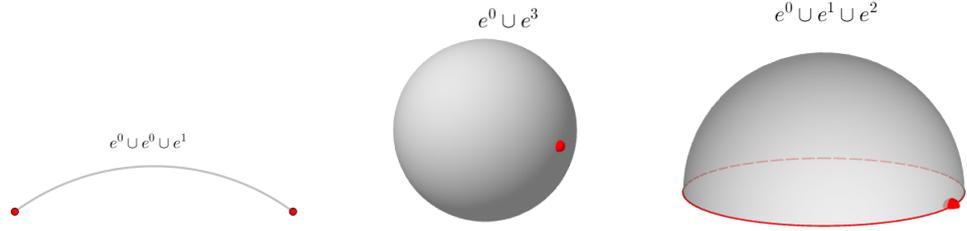


FIGURE 1.12 – Exemples de CW-complexes (les applications φ ne sont pas explicitées).

Les lemmes introduits jusque là permettent de démontrer le théorème final de ce chapitre :

Théorème 5. *M a le même type d'homotopie qu'un CW-complexe contenant une k -cellule pour chaque point critique d'indice k de f .*

Remarque 6. *Suite à la remarque 5, on pourrait montrer que M est homéomorphe à un espace obtenu par attachement de anses.*

Preuve. On raisonne par induction.

D'abord, supposons M non-vide, alors f admet un minimum car les sous-niveaux M^r sont compacts. Notons c_0 ce minimum. Il est atteint en un nombre fini de points critiques car M^{c_0} est compact et les points critiques de f sont isolés. Ces points critiques sont tous d'indice 0 car ils correspondent à un minimum. D'après la section 1.5.2, il existe $\epsilon > 0$ tel que $M^{c_0+\epsilon}$ a le type d'homotopie d'un CW-complexe n'ayant que des 0-cellules, autant de 0-cellules que f a de points critiques associés à c_0 .

Notons $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ la liste finie ou dénombrable des valeurs critiques de f . Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ et $r \in]c_n, c_{n+1}[$, M^r a le même type d'homotopie qu'un CW-complexe K . Les points critiques associés à c_{n+1} sont aussi en nombre fini, notons-les p_1, \dots, p_m . Notons k_1, \dots, k_m leurs indices. Alors, d'après le lemme de la section 1.5.2, il existe $\epsilon > 0$ tel que $M^{c_{n+1}+\epsilon}$ a le même type d'homotopie que $M^r \cup_{\varphi_1} e^{k_1} \cup_{\varphi_2} e^{k_2} \cup \dots \cup_{\varphi_m} e^{k_m}$ où $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ sont les applications d'attachement fournies par le lemme. Or, M^r et K ont même type d'homotopie donc d'après le second lemme sur l'attachement cellulaire (cf 1.5.1), $M^{c_{n+1}+\epsilon}$ a le même type d'homotopie que $K \cup_{\psi_1} e^{k_1} \cup_{\psi_2} e^{k_2} \cup \dots \cup_{\psi_m} e^{k_m}$ pour certaines ψ_1, \dots, ψ_m . Le problème est que cela ne suffit pas pour dire que $M^{c_{n+1}+\epsilon}$ a le même type d'homotopie qu'un CW-complexe. Bien que K est un CW-complexe, les cellules e^{k_i} ne sont pas forcément attachées sur le $(k_i - 1)$ -squelette de K , or c'est une condition nécessaire pour former un CW-complexe. Cependant, on peut se ramener au cas où on attache effectivement ces cellules au bon endroit par une méthode dite

« d'approximation cellulaire » (cf [Mil63]) et en utilisant le premier lemme sur l'attachement de cellule. Nous ne présentons pas cette méthode car elle utilise des outils de topologie algébrique non-étudiés dans le cadre de ce stage. Ainsi, $M^{c_{n+1}+\epsilon}$ a bien le même type d'homotopie qu'un CW-complexe.

Il y a alors trois cas.

- Si M est compacte alors f a un nombre fini de valeurs critiques dont un minimum et un maximum et on conclut directement par induction.
- Si M n'est pas compact mais que tous les points critiques de f sont contenus dans un même M^r , alors les valeurs critiques de f sont en nombre fini. Notons c la plus grande. Par une démonstration similaire à celle effectuée en 1.5.2, on peut montrer que M^c est un rétracte par déformation de M . Cela achève la preuve.
- Sinon, on peut construire une suite infinie de CW-complexes au fur et à mesure que l'on franchit les valeurs critiques de f . Alors, par des outils de topologie algébrique non-étudiés dans le cadre de ce stage, on peut montrer que l'application limite de toutes les équivalences d'homotopie partielles est une équivalence d'homotopie entre M et un CW-complexe.

□

Chapitre 2

Généralisation aux espaces de chemins

Dans ce chapitre, M désigne une variété lisse riemannienne, c'est-à-dire une variété lisse dont chaque espace tangent $T_m M$ est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$, avec une propriété de régularité que nous détaillerons. Au lieu de s'intéresser à la structure de M elle-même, on étudie la structure de l'espace des chemins d'un point à un autre sur M . Cette étude s'avère plus compliquée et moins intuitive car à la différence, de M , cet espace de chemins n'a pas de structure différentielle. Cependant, l'idée reste de considérer une fonction définie sur cet espace de chemins à valeur réelles pour obtenir des propriétés sur la structure de cet espace.

2.1 Notion de variation sur l'espace des chemins

$$\Omega(M, p, q)$$

On appelle métrique riemannienne ce « champ de produit scalaire » sur M . C'est une application qui à un point $m \in M$ associe un produit scalaire sur $T_m M$ ayant la propriété de régularité suivante. Pour tout champ de vecteurs X, Y sur M , l'application $M \rightarrow \mathbb{R}, m \mapsto \langle X_m, Y_m \rangle_m$ est de classe C^∞ .

Soient p et q deux points de M , on définit l'espace des chemins de p à q .

Définition 5. *Un chemin C^∞ par morceaux reliant p à q est une application $\omega : [0, 1] \rightarrow M$ vérifiant :*

- $\omega(0) = p, \omega(1) = q$
- *il existe une subdivision $0 = t_0 < \dots < t_m = 1$ telle que pour tout $i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$, $\omega|_{[t_i, t_{i+1}]}$ est de classe C^∞ .*

L'espace des chemins de p à q est noté $\Omega(M, p, q)$ ou plus brièvement Ω .

Remarque 7. $\Omega(M, p, q)$ n'a pas de structure de variété différentielle et il n'est même pas évident d'y mettre une topologie (cf [Mil63], § 17).

Nous allons tout de même introduire des notions analogues à celles qu'ont intrinsèquement les variétés différentielles.

Définition 6. L'espace tangent à Ω en un chemin ω , noté $T_\omega\Omega$, est l'ensemble des champs de vecteurs $W : [0, 1] \rightarrow M$, C^∞ par morceaux vérifiant :

- $W(0) = W(1) = 0$
- $\forall t \in [0, 1], W(t) \in T_{\omega(t)}M$, (W est dit « le long de » ω).

Cette notion est équivalente à une notion de variation.

Définition 7. Une variation d'un chemin ω est une application $\alpha :]-\epsilon, \epsilon[\times [0, 1] \rightarrow M$, où $\epsilon > 0$, vérifiant :

- $\alpha(0, \cdot) = \omega$,
- pour tout $u \in]-\epsilon, \epsilon[$, $\alpha(u, 0) = p$ et $\alpha(u, 1) = q$,
- il existe une subdivision $0 = t_0 < \dots < t_m = 1$ telle α est de classe C^∞ sur $]-\epsilon, \epsilon[\times [t_i, t_{i+1}]$, pour tout $i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$.

On note $\bar{\alpha}$ l'application $]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow \Omega, u \mapsto \alpha(u, \cdot)$ de sorte que $\forall u, t, \alpha(u, t) = \bar{\alpha}(u)(t)$.

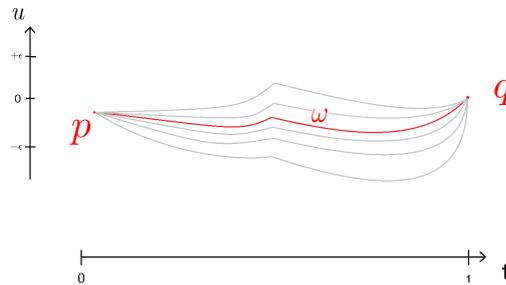


FIGURE 2.1 – Variation d'un chemin ω .

Si α est une variation de $\omega \in \Omega$ alors le vecteur vitesse de α , $\frac{d\alpha}{du}(0)$ est le champ de vecteur $W \in T_\omega\Omega$ défini par : $W(t) = \frac{\partial \alpha}{\partial u}(0, t)$.

L'équivalence entre ces deux notions est conséquence du lemme suivant.

Lemme 8. Étant donné un chemin ω .

Si α est une variation de ω alors le champ de vecteur $\frac{d\alpha}{du}(0)$ appartient à $T_\omega\Omega$.

Réciproquement, si $W \in T_\omega\Omega$ alors il existe une variation α qui l'induit.

Preuve. Le sens direct n'est pas difficile. Pour le sens réciproque, il suffit de prendre la variation $\alpha : (u, t) \mapsto \exp_{\omega(t)}(uW(t))$. \square

Toutes ces notions, assez analogues à celles sur les variétés différentielles, font de Ω une variété différentielle de dimension infinie en quelque sorte.

2.2 Fonction énergie E et chemins critiques

Comme dans le chapitre précédent, nous nous aidons d'une fonction à valeurs réelles définie sur Ω .

Définition 8. La fonction énergie $E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, E(\omega) = \int_0^1 \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\|^2 dt.$$

$E(\omega)$ est l'énergie du chemin ω .

Remarque 8. E est bien définie car on peut montrer que la fonction $t \mapsto \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\|^2$ est de classe C^∞ .

Comme dans le chapitre 1 on veut exhiber les points critiques de E . Mais, Ω n'ayant pas de structure différentielle il faut raisonner par analogie.

Dans le cas d'une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, l'application tangente à f en $m \in M$ peut être décrite de la manière suivante. On prend un vecteur $v \in T_m M$. Ce vecteur correspond à une classe de chemins. Prenons un chemin γ dans cette classe, $\gamma(0) = m$ et $\gamma'(0) = v$. Alors, $T_m f(v) = (f \circ \gamma)'(0)$. Le chemin γ est en quelque sorte une variation associée à v .

En s'inspirant de cela, on construit alors l'application tangente à E de la manière suivante. Pour $W \in T_\omega \Omega$, prenons une variation α de vecteur vitesse W . On veut écrire :

$$T_\omega E(W) = \frac{d(E \circ \bar{\alpha})}{du}(0).$$

Il faut justifier la bonne définition de cette quantité. On note $\frac{D}{dt}$ la dérivée covariante associée à la connexion de Levi-Civita de la métrique Riemannienne.

Lemme 9. Notons V le champ de vecteur vitesses de ω , A le champ de vecteurs accélération, $(t_i)_{0 \leq i \leq m}$ la subdivision associée à ω et $\Delta_t V$ la discontinuité en t du champ V :

$$\forall t \in [0, 1] \text{ où } \omega \text{ est lisse, } V(t) = \frac{d\omega}{dt}, \quad A(t) = \frac{D}{dt} \frac{d\omega}{dt} \quad \text{et} \quad \Delta_t V = V_{t^+} - V_{t^-}$$

Alors on a :

$$\frac{1}{2} \frac{d(E \circ \bar{\alpha})}{du}(0) = - \sum_{i=1}^{m-1} \langle W(t_i), \Delta_{t_i} V \rangle - \int_0^1 \langle W(t), A(t) \rangle dt.$$

Preuve. Puisque $\frac{D}{dt}$ est adapté à la métrique riemannienne on a :

$$\frac{d(E \circ \bar{\alpha})}{du}(u) = \frac{d}{du} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial t}(u, t), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(u, t) \right\rangle dt = 2 \int_0^1 \left\langle \frac{D}{du} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}(\cdot, t) \right)(u), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(u, t) \right\rangle dt$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}(u, \cdot), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(u, \cdot) \right\rangle = \left\langle \frac{D}{dt} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}(u, \cdot) \right), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(u, \cdot) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}(u, \cdot), \frac{D}{dt} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}(u, \cdot) \right) \right\rangle.$$

En injectant la seconde équation dans la première et en utilisant la formule de symétrie suivante :

$$\frac{D}{dt} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}(u, \cdot) \right) (t) = \frac{D}{du} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}(\cdot, t) \right) (u)$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d(E \circ \bar{\alpha})}{du}(u) &= \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\langle \frac{D}{du} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}(\cdot, t) \right) (u), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(u, t) \right\rangle dt \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}(u, t_i^-), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(u, t_i^-) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}(u, t_{i-1}^+), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(u, t_{i-1}^+) \right\rangle \right) \\ &\quad - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}(u, t), \frac{D}{dt} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}(u, \cdot) \right) (t) \right\rangle dt. \end{aligned}$$

Or, on a $\frac{\partial \alpha}{\partial u}(u, t_i^-) = \frac{\partial \alpha}{\partial u}(u, t_i^+) = \frac{\partial \alpha}{\partial u}(u, t_i)$ donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d(E \circ \bar{\alpha})}{du}(u) &= \sum_{i=1}^{m-1} \left(\left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}(u, t_i), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(u, t_i^-) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}(u, t_i), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(u, t_i^-) \right\rangle \right) \\ &\quad - \int_0^1 \left\langle \frac{D}{dt} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}(u, \cdot) \right) (t), \frac{\partial \alpha}{\partial u}(u, t) \right\rangle dt. \end{aligned}$$

De sorte qu'en évaluant en $u = 0$ on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d(E \circ \bar{\alpha})}{du}(0) &= - \sum_{i=1}^{m-1} \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}(0, t_i), \Delta_{t_i} \frac{\partial \alpha}{\partial t}(0, \cdot) \right\rangle - \int_0^1 \left\langle \frac{D}{dt} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}(0, \cdot) \right) (t), \frac{\partial \alpha}{\partial u}(0, t) \right\rangle dt \\ &= - \sum_{i=1}^{m-1} \langle W_{t_i}, \Delta_{t_i} V \rangle - \int_0^1 \left\langle \frac{D}{dt} \left(\frac{d\omega}{dt} \right) (t), W(t) \right\rangle dt \\ &= - \sum_{i=1}^{m-1} \langle W(t_i), \Delta_{t_i} V \rangle - \int_0^1 \langle W(t), A(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

□

La bonne définition de $T_\omega E$ provient alors du fait que la quantité $\frac{d(E \circ \bar{\alpha})}{du}(0)$ est bien définie et qu'elle ne dépend ni de W ni de la variation α choisie.

Définition 9. Un chemin $\omega \in \Omega$ est dit chemin critique si $T_\omega E = 0$.

Les chemins critiques de E sont en fait bien identifiables d'après le lemme suivant.

Théorème 6. *Les chemins critiques sont les géodésiques reliant p à q .*

Preuve. Si ω est un chemin critique de subdivision (t_0, \dots, t_m) alors, quelque soit le champ W tangent à ω , $T_\omega E(W) = 0$. Notons V le champ de vecteurs vitesse de ω et A son champ de vecteurs accélération. Donnons-nous une fonction $\nu : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ positive et s'annulant uniquement en les t_i (une telle fonction existe). Prenons pour W le champ de vecteurs le long de ω , $W : t \mapsto \nu(t)A(t)$. Alors, $T_\omega E(W) = 0$ donne $-\int_0^1 \nu(t)\|A(t)\|^2 dt = 0$ et donc, $A = 0$. Prenons maintenant pour W un champ de vecteurs tangent à ω prenant la valeur $\Delta_{t_i} V$ en t_i (un tel champ existe). Alors, $T_\omega E(W) = 0$ donne $-\sum_{i=1}^{m-1} \|\Delta_{t_i} V\|^2 = 0$. De sorte que V est continue. Ces deux conditions, V continue et $A = 0$, impliquent que ω est de classe C^∞ vérifiant $A = 0$, c'est donc une géodésique.

Réciproquement, si $\gamma \in \Omega$ est une géodésique, elle est lisse sans discontinuité et d'accélération nulle ce qui assure $T_\gamma E = 0$. \square

2.3 Étude de E en un chemin critique

2.3.1 Hessienne de E

Comme dans le chapitre 1, poursuivons l'étude de E en un chemin critique en introduisant une notion de hessienne.

Pour cela, nous avons défini en 1.2 la hessienne de f en un point critique p . On ne peut pas appliquer cette définition telle quelle à f mais on peut la reformuler en terme de variation. En effet, prenons $v, w \in T_p M$. Donnons nous, une variation $\alpha : U \rightarrow M$ à deux paramètres, où U est un voisinage ouvert de $(0, 0)$ dans \mathbb{R}^2 , qui vérifie : $\alpha(0, 0) = p$, $\frac{\partial \alpha}{\partial u_1}(0, 0) = v$, et $\frac{\partial \alpha}{\partial u_2}(0, 0) = w$ (une telle variation existe). Alors on a :

$$Hf(p)(v, w) = \frac{\partial^2(f \circ \alpha)}{\partial u_1 \partial u_2}(0, 0).$$

En effet, par le calcul, donnons-nous φ une carte en p :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(f \circ \alpha)}{\partial u_1 \partial u_2}(0, 0) &= d(f \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ \alpha(0, 0)) \cdot \left(\frac{\partial^2(\varphi \circ \alpha)}{\partial u_1 \partial u_2}(0, 0) \right) \\ &\quad + d^2(f \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ \alpha(0, 0)) \cdot \left(\frac{\partial(\varphi \circ \alpha)}{\partial u_1}(0, 0), \frac{\partial(\varphi \circ \alpha)}{\partial u_2}(0, 0) \right) \\ &= 0 + d^2(f \circ \varphi^{-1})(0) \cdot (v, w) \\ &= Hf(p)(v, w). \end{aligned}$$

Cela inspire la formule suivante pour la hessienne de E . Étant donnée une variation à deux paramètres $\alpha : U \times [0, 1] \rightarrow M$ vérifiant $\alpha(0, 0, \cdot) = \gamma$, $\frac{\partial E}{\partial u_1}(0, 0, \cdot) = W_1$ et $\frac{\partial E}{\partial u_2}(0, 0, \cdot) = W_2$, on veut écrire

$$HE(\gamma)(W_1, W_2) = \frac{\partial^2(E \circ \bar{\alpha})}{\partial u_1 \partial u_2}(0, 0).$$

Définition 10. La hessienne de E en γ est l'application :

$$\begin{aligned} HE(\gamma) : T_\gamma \Omega \times T_\gamma \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ (W_1, W_2) &\mapsto \frac{\partial^2(E \circ \bar{\alpha})}{\partial u_1 \partial u_2}(0, 0). \end{aligned}$$

Cette application est bien définie d'après le lemme suivant et c'est une forme bilinéaire symétrique.

Lemme 10. Notons V le champ de vecteur vitesse de γ , alors on a :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2(E \circ \bar{\alpha})}{\partial u_1 \partial u_2}(0, 0) = - \sum_{i=1}^n \left\langle W_2(t_i), \Delta_{t_i} \frac{DW_1}{dt} \right\rangle - \int_0^1 \left\langle W_2, \frac{D^2 W_1}{dt^2} + R(V, W_1)V \right\rangle(t) dt$$

Preuve. D'après le lemme 9, on sait que :

$$\frac{\partial(E \circ \bar{\alpha})}{\partial u_2}(u_1, u_2) = - \sum_{i=1}^{m-1} \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}, \Delta_{t_i} \frac{\partial \alpha}{\partial t}(u_1, u_2, \cdot) \right\rangle - \int_0^1 \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}(u_1, u_2, t), \frac{D}{dt} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}(u_1, u_2, \cdot) \right)(t) \right\rangle dt$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2(E \circ \bar{\alpha})}{\partial u_1 \partial u_2}(u_1, u_2) &= - \sum_{i=1}^{m-1} \left\langle \frac{D}{du_1} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u_2}(\cdot, u_2, t_i) \right)(u_1), \Delta_{t_i} \frac{\partial \alpha}{\partial t}(u_1, u_2, \cdot) \right\rangle \\ &\quad - \sum_{i=1}^{m-1} \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}(u_1, u_2, t_i), \frac{D}{du_1} \left(\Delta_{t_i} \frac{\partial \alpha}{\partial t}(\cdot, u_2, \cdot) \right)(u_1) \right\rangle \\ &\quad - \int_0^1 \left\langle \frac{D}{du_1} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u_2}(\cdot, u_2, y) \right)(u_1), \frac{D}{dt} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}(u_1, u_2, \cdot) \right)(t) \right\rangle dt \\ &\quad - \int_0^1 \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}(u_1, u_2, t), \frac{D}{du_1} \left(\frac{D}{dt} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}(\cdot, u_2, \cdot) \right) \right)(u_1) \right\rangle \end{aligned}$$

En évaluant en $u_1 = u_2 = 0$, deux termes s'en vont. D'une part, $\Delta_{t_i} \frac{\partial \alpha}{\partial t}(0, 0, \cdot) = 0$ car $\frac{\partial \alpha}{\partial t}(0, 0, \cdot) = \gamma$ est continue. D'autre part, $\frac{D}{dt} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}(0, 0, \cdot) \right) = \frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt} = 0$ car γ est

une géodésique. Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (E \circ \bar{\alpha})}{\partial u_1 \partial u_2} (0, 0) &= - \sum_{i=1}^{m-1} \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u_2} (0, 0, t_i), \frac{D}{du_1} \left(\Delta_{t_i} \frac{\partial \alpha}{\partial t} (\cdot, 0, \cdot) \right) (0) \right\rangle \\ &\quad - \int_0^1 \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u_2} (0, 0, t), \frac{D}{du_1} \left(\frac{D}{dt} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} (\cdot, 0, \cdot) \right) \right) (0) \right\rangle \\ &= - \sum_{i=1}^{m-1} \left\langle W_2(t_i), \frac{D}{du_1} \left(\Delta_{t_i} \frac{\partial \alpha}{\partial t} (\cdot, 0, \cdot) \right) (0) \right\rangle \\ &\quad - \int_0^1 \left\langle W_2(t), \frac{D}{du_1} \left(\frac{D}{dt} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} (\cdot, 0, \cdot) \right) \right) (0) \right\rangle dt \end{aligned}$$

Deux termes sont à simplifier :

$$\begin{aligned} \frac{D}{du_1} \left(\Delta_{t_i} \frac{\partial \alpha}{\partial t} (\cdot, 0, \cdot) \right) (0) &= \frac{D}{du_1} \left(u_1 \mapsto \frac{\partial \alpha}{\partial t} (u_1, 0, t_i+) - \frac{\partial \alpha}{\partial t} (u_1, 0, t_i-) \right) (0) \\ &= \frac{D}{du_1} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} (\cdot, 0, t_i^+) \right) (0) - \frac{D}{du_1} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} (\cdot, 0, t_i^-) \right) (0) \\ &= \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial u_1} (0, 0, t_i^+) - \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial u_1} (0, 0, t_i^-) \\ &= \frac{D}{dt} W_1(t_i^+) - \frac{D}{dt} W_1(t_i^-) \\ &= \Delta_{t_i} \frac{DW_1}{dt} \\ \left(\frac{D}{du_1} \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) (0, 0, \cdot) &= \left(\frac{D}{du_1} \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) (0, 0, \cdot) - \left(\frac{D}{dt} \frac{D}{du_1} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) (0, 0, \cdot) + \left(\frac{D}{dt} \frac{D}{du_1} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) (0, 0, \cdot) \\ &= R \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} (0, 0, t), \frac{\partial \alpha}{\partial u_1} (0, 0, \cdot) \right) \frac{\partial \alpha}{\partial t} (0, 0, \cdot) + \left(\frac{D}{dt} \frac{D}{du_1} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) (0, 0, \cdot) \\ &= R(V, W_1)V + \left(\frac{D}{dt} \frac{D}{du_1} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) (0, 0, \cdot) \end{aligned}$$

Or, par symétrie, $\frac{D}{du_1} \frac{\partial \alpha}{\partial t} (0, 0, \cdot) = \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial u_1} (0, 0, \cdot) = \frac{DW_1}{dt}$ donc :

$$\left(\frac{D}{du_1} \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) (0, 0, \cdot) = R(V, W_1)V + \frac{D^2 W_1}{dt^2} (\cdot)$$

ce qui achève la démonstration. □

Il s'agit maintenant d'étudier $HE(\gamma)$, son caractère positif et son noyau. On a d'abord le lemme suivant.

Lemme 11. *Si γ est une géodésique de longueur minimale, c'est-à-dire que quelque soit $\omega \in \Omega$ $\int_0^1 \|\frac{d\gamma}{dt}\| dt \leq \int_0^1 \|\frac{d\omega}{dt}\| dt$, alors, $HE(\gamma)$ est positive. Son indice k est donc nul.*

Preuve. Supposons que γ est une géodésique de longueur minimale. Soit, $W \in T_\gamma\Omega$ de variation α . Nous donnons une autre expression de $HE(\gamma)(W, W)$. Notons β la variation à deux paramètres engendrant $(W, W) : \beta : (u_1, u_2) \rightarrow \alpha(u_1 + u_2)$. On a $\frac{\partial(E \circ \beta)}{\partial u_1}(u_1, u_2) = \frac{d(E \circ \bar{\alpha})}{du}(u_1 + u_2)$ de sorte que : $HE(\gamma)(W, W) = \frac{\partial^2(E \circ \beta)}{\partial u_1 \partial u_2}(0, 0) = \frac{d^2(E \circ \bar{\alpha})}{du^2}(0)$. Cette expression étant établie, par minimalité de γ , la fonction $E \circ \bar{\alpha}$ admet un minimum en 0, sa dérivée seconde en ce minimum est donc positive, ce qui démontre la positivité de $HE(\gamma)$. \square

2.3.2 Champs de Jacobi

Intéressons-nous maintenant au noyau de $HE(\gamma)$.

Lemme 12. *Un champ $W \in T_\omega\Omega$ appartient au noyau de E si et seulement si il est de classe C^∞ et vérifie*

$$\frac{D^2W}{dt^2} + R(V, W)V = 0.$$

Preuve. Soit $W \in T_\omega\Omega$. Supposons que quelques soit $X \in T_\omega\Omega$, $HE(\omega)(W, X) = 0$. Prenons $X : t \rightarrow \nu(t)(\frac{D^2W}{dt^2} + R(V, W)V)(t)$ où ν est une fonction auxiliaire à valeurs réelles utilisée dans la preuve du théorème 6. Alors, $HE(\omega)(W, X) = 0$ donne $\int_0^1 \nu(t) \|\frac{D^2W}{dt^2} + R(V, W)V(t)\|^2(t) dt = 0$. De sorte que W vérifie l'équation voulue. Prenons, maintenant pour X un champ le long de ω qui vaut $\Delta_{t_i} \frac{DW}{dt}$ en t_i (un tel champ existe). Alors, $HE(\omega)(W, X) = 0$ donne $\sum_{i=1}^{m-1} \|\Delta_{t_i} \frac{DW}{dt}\|^2 = 0$. Ainsi, $\frac{DW}{dt}$ est continue. Or, une solution de l'équation $\frac{D^2W}{dt^2} + R(V, W)V = 0$ est uniquement déterminée par les valeurs $W(t_i)$ et $\frac{DW}{dt}(t_i)$ ce qui assure que W est de classe C^∞ . \square

La seconde propriété est une équation vérifiée par des champs de vecteurs remarquables appelés champs de Jacobi.

Définition 11. *Un champ $J : [0, 1] \rightarrow M$ le long de γ est dit de Jacobi si il vérifie l'équation :*

$$\frac{D^2J}{dt^2} + R(V, J)V = 0.$$

Remarque 9. *L'ensemble des solutions d'une telle équation est un espace vectoriel de dimension $2n$. Un champ de Jacobi le long de γ est uniquement déterminé par les conditions initiales $J(0)$ et $\frac{DJ}{dt}(0)$.*

Ainsi, on a la reformulation suivante : un élément de $T_\gamma\Omega$ est dans le noyau de $HE(\gamma)$ si et seulement si c'est un champ de Jacobi.

Nous définissons une notion de conjugaison qui nous sera utile par la suite.

Définition 12. *Deux points r et s de M sont conjugués le long d'une géodésique γ s'il existe un champ de Jacobi non-nul $J : [0, 1] \rightarrow M$ le long de γ et vérifiant $J(0) = J(1) = 0$. La multiplicité de r et s en tant que points conjugués est la dimension de l'espace de tels champs de Jacobi.*

Remarque 10. *La dimension d'un tel espace est au plus $n - 1$. En effet, la condition $J(0) = 0$ implique que cet espace vectoriel est de dimension au plus égale à n car un champ de Jacobi vérifiant $J(0) = 0$ est déterminé par son vecteur vitesse en 0 : $\frac{DJ}{dt}(0)$. De plus, on peut exhiber un champ de Jacobi nul en 0 mais pas en 1 (comme cela est fait dans [Mil63], p79), ce qui empêche cet espace d'être de dimension exactement n .*

On a la proposition récapitulant tout cela.

Proposition 3. *$HE(\gamma)$ est dégénérée si et seulement si p et q sont conjugués. L'indice de $HE(\gamma)$ est alors la multiplicité de p et q en tant que points conjugués.*

Nous allons voir que l'existence de champs de Jacobi est liée à l'existence de multiples géodésiques « autour » de γ .

Pour cela, définissons ce que signifie l'existence de « multiples » géodésiques autour de γ .

Définition 13. *Une variation de géodésiques autour de γ est une application $\alpha :] - \epsilon, \epsilon[\times]0, 1[\rightarrow M$ où $\epsilon > 0$ vérifiant :*

$$\forall u \in] - \epsilon, \epsilon[, \alpha(u, \cdot) \text{ est une géodésique.}$$

Remarque 11. *Une variation de géodésique ne fixe pas forcément p et q .*

Alors, les champs de Jacobi s'interprètent ainsi.

Lemme 13. *Si α est une variation de géodésiques autour de γ alors le champ de vecteurs variation initiale W défini par $W(t) = \frac{\partial \alpha}{\partial u}(0, t)$ est un champ de Jacobi. Réciproquement, si J est un champ de Jacobi le long de γ alors, il est le champ de vecteurs variation initiale d'une variation de géodésiques.*

Preuve. Nous ne montrons que le sens direct de ce lemme (le sens réciproque est démontré dans [Mil63] p81-82). Supposons que α est une variation de géodésiques autour de γ . La formule sur le tenseur de courbure R :

$$\frac{D}{du} \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \frac{D}{dt} \frac{D}{du} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = R\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial u}\right) \frac{\partial \alpha}{\partial t}$$

permet décrire :

$$\frac{D^2W}{dt^2} + R(V, W)V = \frac{D}{dt} \frac{D}{du} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + R\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial u}\right) \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{D}{du} \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0.$$

□

Ainsi, plus l'indice de $HE(\gamma)$ est grand, plus il y a de champs de Jacobi nuls en p et q indépendants plus il y a de familles de géodésiques dans tous les sens.

Traitons en exemple le cas de deux points antipodaux sur la sphère. Nous voulons déterminer leur multiplicité. Ici, $M = \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $p = (1, 0, \dots, 0)$ et $q = (-1, 0, \dots, 0)$. Prenons $v = (0, 1, 0, \dots, 0) \in T_p\mathbb{S}^n$. Notons γ le chemin reliant p à q défini par : $\gamma(t) = p \cos(\pi t) + v \sin(\pi t)$ (cf figure 2.2).

Montrons que γ est une géodésique. Dans le cas de \mathbb{R}^{n+1} , le calcul de $\frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt}$ est facilité par la formule :

$$\frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt}(t) = \Pi_{TM}(\gamma''(t))$$

où $\Pi_{TM}(\gamma''(t))$ est la projection orthogonale de $\gamma''(t)$ sur $T_{\gamma(t)}\mathbb{S}^n$. Or, par le calcul, on a : $\gamma''(t) = -\gamma(t) \in (T_{\gamma(t)}\mathbb{S}^n)^\perp$. Donc, $\Pi_{TM}(\gamma''(t)) = 0$ et γ , qui est un chemin C^∞ , vérifie bien l'équation des géodésiques.

On cherche à trouver le plus de variations de géodésiques de γ indépendantes, dans le sens où leur champs de Jacobi associés seront linéairement indépendants. On a choisi un tel γ car c'est le demi-cercle inscrit dans \mathbb{S}^n d'extrémités p et q de vecteur vitesse initial v en p . Or, en appliquant une rotation à \mathbb{S}^n fixant p et q , la trace de ce demi-cercle sur la sphère décrit d'autres demi-cercles d'extrémités p et q qui sont aussi des géodésiques. Cela nous donne une manière d'obtenir des variations de géodésiques de γ . On se donne un vecteur $w \in T_p\mathbb{S}^n$ orthogonal à v , qui donne le sens de variation (le sens de rotation), et on définit :

$$\alpha(u, t) = p \cos(\pi t) + (v \cos(u) + w \sin(u)) \sin(\pi t).$$

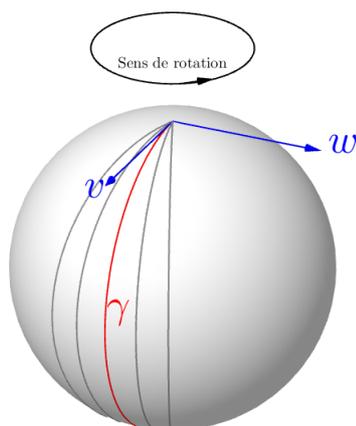
On peut vérifier que α est bien une variation de géodésiques dans \mathbb{S}^n autour de γ (en utilisant l'équation simplifiée des géodésiques).

Puisque $T_p\mathbb{S}^n$ est de dimension n , il existe $n - 1$ vecteurs orthogonaux à v indépendants $w_1, \dots, w_{n-1} \in \mathbb{S}^n$. Ils donnent $n - 1$ variations $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$. On leur associe respectivement le champ de Jacobi J_i :

$$J_i(t) = w_i \sin(\pi t).$$

Le champ J_i est le champ de Jacobi vérifiant $J(0) = p$ et $J'(0) = w_i$. Il vérifie de plus $J_i(1) = 0$.

Ainsi, nous avons $n - 1$ champs de Jacobi indépendants conjuguant p à q . D'après la remarque 9, on en déduit que p et q sont conjugués avec multiplicité $n - 1$.

FIGURE 2.2 – Variation de γ

2.4 Théorème de décomposition

Les résultats figurant dans cette section sont présentés dans un souci d'achever l'analogie avec les résultats du chapitre 1. Leur démonstration n'a pas été étudiée aussi profondément que celle des résultats jusque-là.

Le lemme suivant (dont une preuve est disponible dans [Mil63] §15) exprime l'indice de $HE(\gamma)$ en termes géométriques (comme on l'a fait pour la dimension du noyau).

Lemme 14. *L'indice k de $HE(\gamma)$ est égal au nombre de points $\gamma(t)$ pour $0 < t < 1$ conjugués à $\gamma(0)$ le long de γ , comptés avec leurs multiplicités.*

En mettant sur Ω la topologie indiquée dans [Mil63], §17, on a le théorème suivant (dont une preuve est disponible dans [Mil63] p95), analogue au théorème final du chapitre 1.

Théorème 7. *Si M est complète et que p et q ne sont conjugués le long d'aucune géodésique alors Ω a le même type d'homotopie qu'un CW-complexe ayant une cellule de dimension k pour toute géodésique reliant p à q d'indice k .*

Enfin, les résultats de ce chapitre permettent de démontrer le théorème de Cartan-Hadamard analogue au théorème de Reeb (chapitre 1, théorème 4) dans le sens où il permet d'identifier précisément M lorsqu'elle vérifie certaines propriétés.

Théorème 8 (Cartan-Hadamard). *Si M est simplement connexe, complète et de courbure sectionnelle négative en tout point alors M est difféomorphe à \mathbb{R}^n .*

Preuve. Dans un premier temps, montrons que deux points quelconques de M ne sont conjugués le long d'aucune géodésique. Soient p et q deux points de M et γ

une géodésique allant de p à q . Supposons qu'il existe un champ de Jacobi J le long de γ . Puisque J vérifie $\frac{D^2 J}{dt^2} + R(V, J)V = 0$ on a :

$$\left\langle \frac{D^2 J}{dt^2}, J \right\rangle = -\langle R(V, J)V, J \rangle \geq 0.$$

De sorte que la fonction $\left\langle \frac{DJ}{dt}, J \right\rangle$, dont la dérivée est $\left\langle \frac{D^2 J}{dt^2}, J \right\rangle + \left\| \frac{DJ}{dt} \right\|^2 \geq 0$, est croissante. Ainsi, si $J(0) = J(1) = 0$ (condition nécessaire pour conjuguer les points p et q) alors la fonction $\left\langle \frac{DJ}{dt}, J \right\rangle$ est nulle sur $[0, 1]$, ainsi que sa dérivée. Donc, J est l'unique champ de Jacobi le long de γ de conditions initiales $J(0) = 0$ et $\frac{DJ}{dt}(0) = 0$: J est identiquement nul.

Dans un deuxième temps, montrons que deux points de M sont reliés par une unique géodésique. Soient p et q dans M . Puisque p et q ne sont conjugués le long d'aucune géodésique, nous sommes dans les conditions du théorème 7. Or, d'après le lemme 14, toute géodésique reliant p à q est d'indice 0 car aucun points de M ne sont conjugués. Donc $\Omega(M, p, q)$ a le même type d'homotopie qu'un CW-complexe n'ayant que des 0-cellules d'après le théorème 7. Mais, $\Omega(M, p, q)$ est simplement connexe donc $\Omega(M, p, q)$ est un singleton. L'unique élément de $\Omega(M, p, q)$ est bien une géodésique (en effet, si un chemin est minimal alors c'est une géodésique [cf [Mil63], p61, cor. 10.7]). Enfin, on se donne un point p de M . D'après ce qui précède, pour tout point q dans M , il existe une unique géodésique reliant p à q ce qui montre que l'application $exp_p : T_p M \rightarrow M$ est une bijection. Un lemme sur l'exponentielle permet de montrer que exp_p a un point critique en $v \in T_p M$ si et seulement si la géodésique γ_v de conditions initiales $\gamma_v(0) = p$ et $\gamma'_v(0) = v$ conjugue p à $exp_p(v)$. Ce lemme, dont on ne fait pas la preuve, montre que exp_p n'a pas de point critique, de sorte que c'est un difféomorphisme local. On en déduit que exp_p est un difféomorphisme global. \square

Le tableau suivant récapitule les analogies entre théorie de Morse en dimension finie (chapitre 1) et théorie de Morse en dimension « infinie » (chapitre 2).

	Chapitre 1	Chapitre 2
Espace de travail	M	$\Omega(p, q, M)$
Fonction étudiée	Fonction de Morse f	Fonction énergie E
Éléments particuliers	Point critiques	Géodésiques
Nécessite l'existence de ces objets	Existence de fonctions lisses sans point critique dégénéré	Existence de points p et q conjugués par aucune géodésique
Cas tranchés	Théorème de Reeb	Théorème de Cartan-Hadamard

Bibliographie

- [dC92] Manfredo do Carmo. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, 1992.
- [Fé10] Tanré Félix. *Topologie algébrique*. Dunod, 2010.
- [Laf10] Jacques Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles*. EDP science, 2010.
- [MA10] Mihaï Damian Michèle Audin. *Théorie de Morse et homologie de Floer*. Savoirs actuels, 2010.
- [Mil63] John Milnor. *Morse Theory*. Annals of Mathematics Studies, 1963.
- [Pos90] Mikhail Postnikov. *Leçons de géométrie, variétés différentiables*. Mir, 1990.