Développement 6. Densité des polynômes orthogonaux

Soient $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle et $\rho\colon I \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$ une fonction intégrable. On suppose qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty. \tag{1}$$

Notons $\mathrm{L}^2(I,\rho)$ l'ensemble des fonctions mesurables de I dans $\mathbf{R}$ qui sont intégrables par rapport à la mesure $\rho\,\mathrm{d}x$. Grâce à l'hypothèse (1), les fonctions polynomiales sur I, identifiées à des polynômes de $\mathbf{R}[X]$, appartiennent à l'espace $\mathrm{L}^2(I,\rho)$.

Théorème 1. L'espace $\mathbf{R}[X]$ est dense dans $\mathrm{L}^2(I,\rho)$. En particulier, il existe une base hilbertienne $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathrm{L}^2(I,\rho)$ telles que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad P_n \in \mathbf{R}[X] \quad \text{et} \quad \deg P_n = n.$$

Preuve Grâce au théorème de Riesz-Fischer, l'espace $\mathrm{L}^2(I,\rho)$ est complet. Avec le critère de densité, il suffit de montrer que l'orthogonal $\mathbf{R}[X]^\perp$ est nul. Soit $f \in \mathbf{R}[X]^\perp$. Cette fonction f est, par définition, orthogonale à tous les monômes, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad \int_I x^n f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{2}$$

On veut montrer qu'elle est nulle. Considérons l'ouvert connexe $\Omega := \{|\mathrm{Im}| < \alpha/2\} \subset \mathbf{C}$ et l'application

$$F\colon \left|\begin{array}{l}\Omega \longrightarrow \mathbf{C},\\ z \longmapsto \displaystyle\int_{\mathbf{R}} e^{-izx} f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x\end{array}\right.$$

où l'on a prolongé les fonctions f et ρ sur $\mathbf{R}$ par zéro. Montrons que l'application F est holomorphe sur Ω. D'abord, pour tout réel $x \in \mathbf{R}$, la fonction $z \in \Omega \longmapsto e^{-izx}f(x)\rho(x)$ est holomorphe sur Ω. Par ailleurs, pour tout complexe $z \in \Omega$ et tout réel $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned}|e^{-izx}f(x)\rho(x)| &\leqslant e^{|\mathrm{Im}\,z||x|}\,|f(x)|\,\rho(x)\\ &\leqslant e^{\alpha/2\times|x|}\,|f(x)|\,\rho(x)\\ &= e^{\alpha/2\times|x|}\sqrt{\rho(x)}\times|f(x)|\sqrt{\rho(x)}\end{aligned}$$

où la fonction majorante est dans $\mathrm{L}^1(\mathbf{R})$ puisque l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\int_I e^{\alpha/2\times|x|}\,|f(x)|\,\rho(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_I |f(x)|^2\rho(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} < +\infty.$$

Par conséquent, le théorème d'holomorphie sous la signe intégral nous assure que la fonction F est holomorphe sur Ω et qu'elle vérifie

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall z \in \Omega, \qquad F^{(n)}(z) = \int_{\mathbf{R}} (-ix)^n e^{-izx} f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x.$$

Avec notre hypothèse (2), on obtient alors

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall z \in \Omega, \qquad F^{(n)}(0) = (-i)^n \int_{\mathbf{R}} x^n f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Le théorème des zéros isolés nous assure ainsi que la fonction F est nulle sur un voisinage de 0. Mais l'ouvert Ω étant connexe, elle est nulle sur tout l'ouvert Ω et, en particulier, sur la droite réelle $\mathbf{R}$. La transformée de Fourier sur $\mathrm{L}^1(\mathbf{R})$ étant une injection et comme

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad |f(x)\rho(x)| \leqslant \frac{1}{2}(1+|f(x)|^2)\rho(x),$$

on en déduit que la fonction $f\rho \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R})$ est nulle presque partout. Comme $\rho > 0$, il en va de même pour la fonction f ce qu'il fallait démontrer.

Montrons la seconde partie du théorème. Le précédent paragraphe montre que la famille $(X^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une base totale de $\mathrm{L}^2(I,\rho)$. Il suffit alors de lui appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt qui, remarquons-le, conserve le degré. ◁

Remarque

Faisons un petit aparté sur la transformé de Fourier sur $\mathrm{L}^1(\mathbf{R})$ issu du livre [2]. Pour une fonction $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R})$, on définit sa transformée de Fourier

$$\hat{f}\colon \left|\begin{array}{l}\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{K},\\ t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(x)e^{-ixt}\,\mathrm{d}x\end{array}\right..$$

Notons $\mathscr{C}_0(\mathbf{R})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbf{R}$ et nulles à l'infini. Grâce au théorème 9.12, l'application $f \longmapsto \hat{f}$ réalise une injection $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathscr{C}_0(\mathbf{R})$. En effet, il s'agit d'une conséquence de la formule d'inversion : pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R})$ avec $\hat{f} \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R})$ et pour presque tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$f(x) = \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(t)e^{ixt}\,\mathrm{d}t.$$

[1] Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation.* 2e édition. H&K, 2005.
[2] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe.* 3e édition. Dunod, 1998.