

Développement 18. Théorème de réduction des endomorphismes normaux

Soit $n \geq 1$ un entier. On considère un espace vectoriel euclidien E de dimension n . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal.

Lemme 1. Lorsque $n = 2$ et l'endomorphisme u n'admet pas de valeur propre réelle, pour toute une base orthonormée \mathcal{B} de E , il existe deux réels $a, b \in \mathbf{R}$ tels que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Preuve On écrit la matrice $M := \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{avec } a, b, c, d \in \mathbf{R}.$$

Comme l'endomorphisme u n'admet aucune valeur propre réelle, on a $b \neq 0$. Comme il est normal, on obtient

$$\begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}.$$

En examinant le coefficient en position (1,1), on obtient $b^2 = c^2$, donc $b = \pm c$. Si jamais $b = c$, alors la matrice M serait symétrique, donc elle admettrait une valeur propre réelle ce qui est impossible. On en déduit $b = -c$. En examinant le coefficient en position (1,2), on obtient alors $b(d - a) = b(a - d)$, donc $2b(d - a) = 0$, donc $a = d$ puisque $b \neq 0$. \triangleleft

Théorème 2. Alors il existe une base orthonormée \mathcal{B} de l'espace E telle que la matrice de l'endomorphisme u dans la base \mathcal{B} soit de la forme

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_s, \tau_1, \dots, \tau_s) \quad \text{avec } \tau_i := \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}). \quad (1)$$

En outre, on admet le lemme suivant.

Lemme 3. – L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme est stable par son adjoint.
– L'orthogonal d'un sous-espace propre d'un endomorphisme normal est stable par cet endomorphisme.

Preuve du théorème Effectuons une récurrence sur l'entier n . Lorsque $n = 1$, le théorème est évident. Soit $n \geq 2$ un entier. On suppose désormais que le théorème est vérifié pour tout espace euclidien de dimension $n - 1$ et tout endomorphisme normal. Soient E un espace euclidien de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal.

• *Premier cas.* D'abord, on suppose que l'endomorphisme u admet une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbf{R}$. D'après le premier lemme, le sous-espace vectoriel $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)^\perp$ est stable par les endomorphismes u et u^* . Notons $u|_F$ et $u^*|_F$ les endomorphismes induits. Comme $u^*|_F = (u|_F)^*$, l'endomorphisme $u|_F$ est normal. On conclut alors grâce à l'hypothèse de récurrence.

• *Second cas.* Maintenant, on suppose que l'endomorphisme u n'admet aucune valeur propre réelle. Comme le corps de base est \mathbf{R} , on considère un facteur irréductible

$$Q := X^2 - 2\alpha X + \beta \in \mathbf{R}[X]$$

du polynôme χ_u . Montrons que $N := \text{Ker } Q(u) \neq \{0\}$. Comme le polynôme Q est irréductible sur \mathbf{R} , on peut écrire $Q = (X - \lambda)(X - \bar{\lambda})$ pour un complexe $\lambda \in \mathbf{C}$. On note $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice de l'endomorphisme u dans une base. Le complexe λ étant une racine du polynôme Q avec $Q \mid \chi_u$, le théorème de Cayley-Hamilton assure que $\det(M - \lambda I_n) = 0$, donc

$$\det Q(u) = \det Q(M) = \det(M - \lambda I_n) \det(M - \bar{\lambda} I_n) = 0$$

D'où $N \neq \{0\}$.

Le sous-espace vectoriel N est stable par l'endomorphisme u . De plus, comme l'endomorphisme u est normal, il est également stable par l'endomorphisme u^* . Notons $v := u|_N$ l'endomorphisme induit. Alors l'endomorphisme $v^*v = (u^*u)|_N$ est symétrique, donc il admet une valeur propre $\mu \in \mathbf{R}$. Soit $x \in E$ un vecteur propre associé. Comme l'endomorphisme u n'admet pas de valeur propre réelle, le sous-espace vectoriel $F := \text{Vect}(x, u(x))$ est de dimension 2. De plus, ce dernier est stable par l'endomorphisme u puisque $u^2(x) = 2\alpha u(x) - \beta x \in F$. Enfin, montrons qu'il est stable par l'adjoint u^* . On a

$$u^*(u(x)) = v^*(v(x)) = \mu x \in F$$

et, comme le polynôme Q est irréductible, on peut écrire $\beta \neq 0$ ce qui donne

$$x = \beta^{-1}(2\alpha u(x) - u^2(x))$$

et permet d'écrire

$$\begin{aligned} u^*(x) &= \beta^{-1}(2\alpha u^*(u(x)) - u^*(u^2(x))) \\ &= 2\alpha\beta^{-1}u^*(u(x)) - \beta^{-1}u^*(u^*u(x)) \\ &= 2\alpha\beta^{-1}\mu x - \beta^{-1}\mu u(x) \in F. \end{aligned}$$

Cela montre la stabilité du sous-espace vectoriel F par l'adjoint u^* . Ainsi on peut écrire $(u|_F)^* = u^*|_F$ ce qui montre que l'endomorphisme $u|_F$ est normal. D'après le second lemme, en fixant une base orthonormée \mathcal{B}_2 de F , il existe deux réels $a, b \in \mathbf{R}$ tels que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u|_F) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Comme le sous-espace vectoriel F est stable par les endomorphismes u et u^* , le premier lemme assure que son orthogonal F^\perp est stable par les endomorphismes u^* et $u^{**} = u$. Comme précédemment, on peut alors écrire $(u|_{F^\perp})^* = u|_{F^\perp}$ et l'endomorphisme $u|_{F^\perp}$ est donc normal. Comme $\dim F^\perp = n - 2 < n$, l'hypothèse de récurrence nous fournit une base orthonormée \mathcal{B}_1 de F^\perp tel que la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u|_{F^\perp})$ soit de la forme (1). La base $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ convient alors ce qui conclut. \triangleleft

[1] Xavier GOURDON. *Algèbre*. 2^e édition. Ellipses, 2009.