

Leçon 102. Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

1. NOTATION. Dans toute cette leçon, on considère un corps K .

1. Théorie des systèmes d'équations linéaires

1.1. Définition et reformulation matricielle

2. DÉFINITION. Soient $n, p \geq 1$ deux entiers non nuls. Un *système linéaire* à n inconnus et p équations est un système de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + \cdots + a_{p,n}x_n = b_p \end{cases} \quad (1)$$

avec $a_{i,j} \in K$ et $b_i \in K$ dont l'inconnue est un vecteur $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$. Il est dit *homogène* si $b_1 = \cdots = b_p = 0$.

3. EXEMPLE. Si le corps K n'est pas de caractéristique 5, le système

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1, \\ x - y = 0 \end{cases}$$

admet une unique solution qui est le couple $(1/5, -1/5)$.

4. PROPOSITION. On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ dont les coefficients sont les scalaires $a_{i,j}$ et le vecteur $b \in K^n$ dont les coordonnées sont les scalaires b_i . Alors un vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ vérifie le système (1) si et seulement si $Ax = b$.

5. DÉFINITION. Le système (1) est *compatible* s'il admet au moins une solution.

6. PROPOSITION. L'ensemble des solutions d'un système compatible est un sous-espace affine de K^n dirigé par le sous-espace des solutions du système homogène associé.

7. COROLLAIRE. On suppose que le système (1) est homogène et compatible et que la matrice A est de rang r . Alors l'ensemble des solutions du système (1) est un sous-espace vectoriel de dimension $n - r$.

8. LEMME. Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice. Alors son *commutant*

$$\mathcal{C}_K(M) := \{B \in \mathcal{M}_n(K) \mid MB = BM\}$$

est de dimension au moins n

9. THÉORÈME. Le commutant $\mathcal{C}_K(M)$ et l'algèbre $K[M]$ sont égaux si et seulement si les polynômes minimal π_M et caractéristique χ_M de la matrice M sont égaux.

1.2. Les systèmes de Cramer

10. DÉFINITION. Un *système de Cramer* est un système $Ax = b$ à n équations et n inconnues où la matrice A est inversible.

11. PROPOSITION. Soit $Ax = b$ un système de Cramer. Alors il admet une unique solution : le vecteur $x = A^{-1}b$.

12. THÉORÈME. Soit $Ax = b$ un système de Cramer. On écrit

$$A = (c_1 \ \dots \ c_n) \text{ avec } c_i \in K^n.$$

Alors son unique solution $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ est donnée par la formule

$$x_i = \frac{\det(c_1 \ \dots \ c_{i-1} \ b \ c_{i+1} \ \dots \ c_n)}{\det A}, \quad i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

13. EXEMPLE. Considérons le système

$$\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 7, \\ x + 2y - 4z = 3, \\ 3x - 4y - 6z = 5. \end{cases}$$

Alors la première coordonnée de sa solution vaut

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & -6 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & -6 \end{vmatrix} = 5.$$

14. REMARQUE. Cette méthode n'est pas envisageable en pratique puisqu'elle requiert au plus n^4 opérations sur le corps K .

1.3. Le cas général

15. THÉORÈME (*Rouché-Fontené*). Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ une matrice de rang r de coefficients $a_{i,j}$. Quitte à permuter ses lignes et colonnes, on suppose que la matrice extraite $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq r}$ est inversible de déterminant $\delta \neq 0$. Soit $b \in K^n$ un vecteur.

– Alors le système $Ax = b$ est compatible si et seulement si ses *sous-déterminant caractéristique*

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,r} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,r} & b_r \\ a_{s,1} & \cdots & a_{s,r} & b_s \end{vmatrix}, \quad s \in \llbracket r+1, n \rrbracket$$

sont nuls.

– Dans ce cas, le système $Ax = b$ est équivalent au système

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1,n}x_n, \\ \vdots \\ a_{r,1}x_1 + \cdots + a_{r,r}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{r,n}x_n. \end{cases}$$

16. EXEMPLE. Soit $m \in \mathbf{R}$ un réel. On considère le système $Ax = b$ avec

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}.$$

Comme $\text{rg } A = 2$, on considère la sous-matrice constituée des deux premières lignes et colonnes. Alors le seul sous-déterminant caractéristique vaut

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & m \end{vmatrix} = 2(m+1).$$

Alors le système est compatible si et seulement si $m = -1$.

2. L'algorithme du pivot de Gauss

2.1. Matrices échelonnées et opérations élémentaires

17. DÉFINITION. Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ est *échelonnée en lignes* si ses lignes commencent par un nombre de zéros strictement croissant à mesure que l'indice augmente.

Elle est *échelonnée en colonnes* si sa transposée est échelonnée en lignes.

18. EXEMPLE. La matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

est échelonnée en lignes.

19. DÉFINITION. On note $E_{i,j} := (\delta_{i,k}\delta_{j,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n} \in \mathcal{M}_n(K)$ les matrices élémentaires.

– Une *matrice de transvection* est une matrice de la forme

$$T_{i,j}(\lambda) := I_n + \lambda E_{i,j}$$

avec $i \neq j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\lambda \in K$.

– Une *matrice de dilatation* est une matrice de la forme

$$D_i(\lambda) := I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$$

avec $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\lambda \in K^\times$.

– Une *matrice de permutation* est une matrice de la forme

$$P_{i,j} := I_n - (E_{i,i} + E_{j,j}) + E_{i,j} + E_{j,i}$$

avec $i \neq j \in \llbracket 1, n \rrbracket$

20. DÉFINITION. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ une matrice dont on note C_j ses colonnes avec $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et L_j ses lignes avec $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- Le produit $AT_{i,j}(\lambda)$ a pour effet de remplacer la colonne C_j par $C_j + \lambda C_i$.
- Le produit $AD_i(\lambda)$ a pour effet de multiplier la colonne C_j par le scalaire λ .
- Le produit $T_{i,j}(\lambda)A$ a pour effet de remplacer la ligne L_j par $L_i + \lambda L_j$.
- Le produit $D_i(\lambda)A$ a pour effet de multiplier la ligne L_j par le scalaire λ .
- Le produit $AP_{i,j}$ a pour effet de multiplier les colonnes C_i et C_j .
- Le produit $P_{i,j}A$ a pour effet de multiplier les lignes L_i et L_j .

Lorsqu'on effectue ces produits, on dit qu'on fait des *opérations élémentaires* sur les lignes ou colonnes de la matrice A .

21. REMARQUE. Effectuer des opérations élémentaires, sauf les deux dernières, sur un système linéaire ne change pas ses solutions.

2.2. La méthode pour un système de Cramer

22. THÉORÈME. Les matrices de transvection engendrent le groupe $SL_n(K)$.

23. COROLLAIRE. Les matrices de transvection et de dilatation engendrent le groupe $GL_n(K)$.

24. PROPOSITION. Toute matrice $M \in GL_n(K)$ est de la forme

$$M = T_1 \cdots T_r \operatorname{diag}(1, \dots, 1, \lambda) \quad \text{avec} \quad \lambda := \det M$$

pour des matrices de transvection $T_1, \dots, T_r \in SL_n(K)$.

25. COROLLAIRE. Les orbites de l'action du groupe $SL_n(K)$ sur l'ensemble $GL_n(K)$ sont caractérisées par le déterminant.

2.3. La méthode générale

26. DÉFINITION. Un *pivot* d'une matrice de taille $n \times p$ est un coefficient non nul de sa première colonne (ou ligne).

27. LEMME. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. Alors il existe un produit $P \in GL_n(K)$ de permutations et de transvections tel que la matrice PA soit de la forme

$$PA = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & A' \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A' \in \mathcal{M}_{n-1,p-1}(K).$$

28. THÉORÈME (*méthode du pivot de Gauss*). Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. Alors il existe un produit $P \in GL_n(K)$ de permutations et de transvections tel que la matrice PA soit échelonnée en lignes.

29. EXEMPLE. Sur \mathbf{R} , après une opérations élémentaires, la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

devient la matrice

$$T_{1,2}(1/2)A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7/2 \end{pmatrix}.$$

30. REMARQUE. La méthode du pivot de Gauss demande au plus $O(n^3)$ opérations sur le corps K .

31. REMARQUE. Une fois obtenue une telle matrice P , il est simple de trouver une solution du système $Ax = b$. En effet, la matrice $B := PA$ est échelonnée en ligne et le système $Bx = Pb$ est facile à résoudre.

3. Quelques décompositions matricielles et leurs applications

3.1. Les décompositions LU et de Cholesky

32. DÉFINITION. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ admet une *décomposition LU* si elle peut s'écrire sous la forme $A = LU$ où les matrices L et U sont respectivement triangulaires inférieure et supérieure.

33. THÉORÈME (*décomposition LU*). Soit $A \in GL_n(K)$ une matrice carrée inversible de coefficients $a_{i,j}$ telle que ses sous-matrices $(a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq k}$ avec $k \leq n$ soient inversible. Alors elle admet une unique décomposition $A = LU$. De plus, elle est unique dès lors que les coefficients diagonaux de la matrice L valent 1.

34. APPLICATION. Une fois une décomposition $A = LU$ obtenue, il est facile de résoudre le système $Ax = b$: on résout le système triangulaire $Ly = b$ puis le système triangulaire $Uv = w$.

35. THÉORÈME (*décomposition de Cholesky*). Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ une matrice symétrique réelle définie positive. Alors il existe une matrice triangulaire supérieure $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A = B^t B$. De plus, elle est unique dès lorsque que ses coefficients diagonaux sont strictement positifs.

3.2. La décomposition QR et l'application à l'algèbre linéaire

36. THÉORÈME (*décomposition QR*). Soit $A \in GL_n(\mathbf{C})$ une matrice inversible. Alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ tel que

- $A = QR$;

- la matrice Q soit unitaire ;
- la matrice R soit triangulaire supérieure où les coefficients de sa diagonale sont positifs.

37. THÉORÈME (*méthode QR*). Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbf{C})$ une matrice dont les valeurs propres sont de modules deux à deux distincts. On peut alors trouver une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbf{C})$ et des complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{C}$ triés par modules décroissants tels que

$$A = P\Lambda P^{-1} \quad \text{avec} \quad \Lambda := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

De plus, on suppose que la matrice P admet une décomposition LU. Définissons la suite $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$ de matrice de la manière suivante :

- on pose $A_0 = A$;
- pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, on pose $A_{k+1} := R_k Q_k$ où le couple (Q_k, R_k) est la décomposition QR de la matrice A_k .

Alors la suite $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge coefficient par coefficient vers la matrice Λ .

38. REMARQUE. Pour un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$, on applique la méthode QR à la matrice C_P lorsque les hypothèses sont vérifiées pour trouver les racines du polynôme P .

[1] Philippe CIARLET. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. 3^e tirage. Masson, 1982.

[2] Xavier GOURDON. *Algèbre*. 2^e édition. Ellipses, 2009.

[3] Joseph GRIFONE. *Algèbre linéaire*. 4^e édition. Cepadué, 2011.

[4] Daniel PERRIN. *Cours d'algèbre*. Ellipses, 1996.

[5] Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie*. 2^e édition. De Boeck Supérieur, 2021.