Leçon 223. Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

1. Notation. Tout au long de cette leçon, on considère le corps $\mathbf{K}$ des réels ou des complexes. Une *suite numérique* est une fonction $u\colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{K}$ qu'on notera $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ où, pour chaque entier $n \in \mathbf{N}$, on a posé $u_n = u(n)$. On omettra l'adjectif « numérique ».

1. Des outils simples concernant la convergence

1.1. Limite d'une suite

2. Définition. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge* vers un scalaire $\ell \in \mathbf{K}$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant N, \qquad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

3. Proposition. Un suite convergente $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un unique scalaire $\ell \in \mathbf{K}$, appelé sa *limite*. Cette dernière sera notée $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$ et on écrira $u_n \longrightarrow \ell$.

4. Exemple. La suite $(2^{-n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0. La suite $(\cos n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas.

5. Proposition. Une fonction $f\colon \mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{K}$ est continue si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers un scalaire $\ell \in \mathbf{K}$, on a $f(u_n) \longrightarrow f(\ell)$.

6. Définition. Une *extraction* est une fonction strictement croissante de $\mathbf{N}$ vers $\mathbf{N}$. Une *sous-suite* d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ pour une extraction $\varphi\colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$.

7. Exemple. La suite constante égale à 1 est une sous-suite de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbf{N}}$.

8. Proposition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite convergeant vers un scalaire $\ell \in \mathbf{K}$. Alors toute sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ de cette dernière converge vers le scalaire $\ell \in \mathbf{K}$.

9. Théorème *(passage à la limite)*. Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles convergentes qui vérifie

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_n \leqslant v_n.$$

Alors leurs limites respectivement ℓ et ℓ' vérifient $\ell \leqslant \ell'$.

10. Théorème *(des gendarmes)*. Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ trois suites réelles. On suppose que

- pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$;
- les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent vers un même réel $\ell \in \mathbf{R}$.

Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers le réel ℓ.

11. Définition. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est *bornée* s'il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad |u_n| \leqslant M.$$

Lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est *minorée* (respectivement *majorée*) s'il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_n \geqslant M \qquad (\text{respectivement } u_n \leqslant M).$$

12. Théorème. Toute suite réelle croissante et majorée (respectivement décroissante et minorée) est convergente et sa limite vaut $\sup_{n\in\mathbf{N}} u_n$ (respectivement $\inf_{n\in\mathbf{N}} u_n$).

13. Proposition *(suites adjacentes)*. Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle croissante et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle décroissante telles que $u_n - v_n \longrightarrow 0$. Alors ces deux suites convergent vers la même limite. On dit qu'elles sont *adjacentes*

14. Exemple. La suite $(1 - 1/n)_{n\geqslant 1}$ et $(1 + 1/n^2)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.

15. Application. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle positive décroissante convergeant vers 0. Alors la série $\sum (-1)^n a_n$ converge et, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on peut écrire

$$\Big|\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k a_k\Big| \leqslant a_n.$$

1.2. Comportements asymptotiques

16. Définition. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est *dominée* par une autre suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ s'il existe un réel $A \geqslant 0$ et un entier $N \in \mathbf{N}$ tels que

$$\forall n \geqslant N, \qquad |u_n| \leqslant M\,|v_n|.$$

On note alors $u_n = \mathrm{O}(v_n)$. Elle est *négligeable* devant la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \qquad |u_n| \leqslant \varepsilon\,|v_n|.$$

On note alors $u_n = o(v_n)$. Les deux suites sont *équivalentes* si

$$u_n - v_n = o(u_n).$$

17. Exemple. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0 si et seulement si $u_n = o(1)$. On peut écrire $\alpha^n = o(n!)$ pour tout réel $\alpha \in \mathbf{R}$.

18. Théorème. Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites. On suppose que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne s'annule plus à partir d'un certain rang $N \in \mathbf{N}$. Alors

- on a $u_n = o(v_n)$ si et seulement si la suite $(u_n/v_n)_{n\geqslant N}$ tend vers 0 ;
- on a $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ si et seulement si la suite $(u_n/v_n)_{n\geqslant N}$ est bornée.
- on a $u_n \sim v_n$ si et seulement si la suite $(u_n/v_n)_{n\geqslant N}$ tend vers 1.

19. Proposition. Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites équivalentes. Si la première converge vers une limite $\ell \in \mathbf{K}$, alors la seconde converge vers cette limite ℓ. Réciproquement, si elles convergent vers une même limite non nulle, alors elles sont équivalentes.

20. Contre-exemple. Pour la réciproque, la non nullité de la limite est nécessaire : on pourra penser aux suites $(1/n)_{n\geqslant 1}$ et $(1/n^2)_{n\geqslant 1}$ qui tendent vers 0 et qui ne sont pas équivalentes.

21. Théorème *(Stirling)*. Lorsque $n \longrightarrow +\infty$, on a

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}.$$

– D1 –

1.3. Suites de Cauchy

22. Définition. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une *suite de Cauchy* si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall p, q \geqslant N, \qquad |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon.$$

23. Proposition. Toute suite convergente est de Cauchy.

24. Proposition. Toute suite de Cauchy est bornée.

25. Proposition. Une suite de Cauchy qui admet une sous-suite convergente converge.

26. Théorème. Toute suite réelle ou complexe de Cauchy est convergente.

27. Exemple. La série harmonique $(1+\cdots+1/n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas de Cauchy, donc elle ne peut pas converger.

2. Des notions plus avancées pour étudier les suites

2.1. Valeurs d'adhérence

28. Définition. Un scalaire $\ell \in \mathbf{K}$ est une *valeur d'adhérence* d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbf{N},\ \exists n \geqslant N, \qquad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

29. Exemple. La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet deux valeurs d'adhérence, à savoir ± 1.

30. Proposition. Une suite convergente admet une unique valeur d'adhérence qui se trouve être sa limite.

31. Proposition. Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite et $\ell \in \mathbf{K}$ un scalaire. Alors les points suivants sont équivalents :
- le scalaire ℓ est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$;
- la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une sous-suite convergente vers le scalaire ℓ ;
- pour tout entier $N \in \mathbf{N}$, on a $\ell \in \overline{\{x_n \mid n \geqslant N\}}$.

32. Application. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 0$. Considérons la plus grande valeur d'adhérence $\ell \in [0,+\infty]$ de la suite $(|a_n|^{1/n})_{n\geqslant 1}$. Alors $R = 1/\ell$.

33. Théorème *(Bolzano-Weierstrass)*. Toute suite réelle ou complexe admet une valeur d'adhérence.

2.2. Limites supérieure et inférieure

34. Définition. La *limite supérieure* et la *limite inférieure* d'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont respectivement les quantités

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n := \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geqslant n} u_k \qquad \text{et} \qquad \limsup_{n\to+\infty} u_n := \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geqslant n} u_k.$$

35. Exemple. Les limites supérieure et inférieure de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont respectivement les réels 1 et -1.

36. Proposition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. Alors
- $\liminf_{n\to+\infty} u_n \leqslant \limsup_{n\to+\infty} u_n$;
- la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un réel $\ell \in \mathbf{R}$ si et seulement si ses limites supérieures et inférieures sont égales à ce réel ℓ ;

37. Théorème. La limite supérieure (respectivement inférieure) d'une suite réelle est sa plus grande (respectivement petite) valeurs d'adhérence.

2.3. La convergence au sens de Cesàro

38. Définition. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge *au sens de Cesàro* si la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_1+\cdots+u_n}{n}$$

existe.

39. Théorème. Une suite convergente vers une limite réelle $\ell \in \mathbf{R}$ converge au sens de Cesàro vers cette même limite ℓ.

40. Contre-exemple. La réciproque est fausse : la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0 au sens de zéro bien qu'elle diverge.

41. Application. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite non nulle convergeant vers une limite $\ell \neq 0$. Alors

$$\frac{n}{1/u_1+\cdots+1/u_n} \longrightarrow \ell.$$

42. Théorème *(Féjer)*. Soit $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue 2π-périodique. Notons $(c_n(f))_{n\in\mathbf{Z}}$ sa suite de ses coefficients de Fourier et, pour $N \in \mathbf{N}$, on note

$$S_N(f)(t) := \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{int}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Alors la suite de terme général

$$\frac{1}{N} \sum_{n=-N}^{N} S_n(f)$$

converge vers la fonction f dans l'espace $\mathrm{L}^p(\mathbf{T})$.

3. Les suites numériques récurrentes

3.1. Les suites récurrentes d'ordre 1

43. Définition. Une *suite récurrente linéaire d'ordre 1* est une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ s'écrivant sous la forme

$$u_{n+1} = f(u_n), \qquad n \in \mathbf{N}$$

pour une fonction $f\colon E \longrightarrow E$ et une partie $E \subset \mathbf{K}$. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une *orbite* de la fonction f.

44. Définition. Soient $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une orbite d'une fonction continue $f\colon I \longrightarrow I$. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans I, alors sa limite est un point fixe de la fonction f.

45. Proposition. Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une orbite d'une fonction continue $f\colon I \longrightarrow I$.
- Si la fonction f est croissante, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est monotone.
- Si la fonction f est décroissante, alors les suite $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ sont monotones et leurs sens de variation sont opposés.

46. Exemple. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle vérifiant

$$u_{n+1} = \sin u_n \qquad \text{et} \qquad |u_0| \leqslant \pi/2.$$

Alors elle converge vers 0.

47. Théorème *(méthode de Newton)*. Soit $f\colon [c,d] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant

$$f(c) < 0 < f(d) \qquad \text{et} \qquad f' > 0.$$

Soit $a \in [c,d]$ son unique zéro. On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par la relation

$$x_{n+1} = F(x_n) \quad \text{avec} \quad F(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Alors il existe un intervalle $I \subset [c,d]$ qui est stable par la fonction F telle que, si $x_0 \in I$, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers le réel a.

48. Théorème. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite complexe d'un compact $X \subset \mathbf{C}$ vérifiant

$$|x_{n+1} - x_n| \longrightarrow 0.$$

D2

Alors l'ensemble Γ de ses valeurs d'adhérence est connexe.

49. Corollaire. Soient $f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction continue et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de l'intervalle $[0,1]$ définie par l'égalité

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad n \in \mathbf{N}.$$

On suppose que $x_{n+1} - x_n \longrightarrow 0$. Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

3.2. Études des suites récurrentes linéaires d'ordre 2

50. Définition. Une *suite récurrente linéaire* d'ordre p est une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ s'écrivant sous la forme

$$\forall n \geqslant p, \qquad u_n = a_1 u_{n-1} + \cdots + a_p u_{n-p} \tag{1}$$

pour des complexes $a_1, \dots, a_p \in \mathbf{C}$.

51. Remarque. On peut reformuler cette dernière relation matriciellement en écrivant

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad X_{n+1} = AX_n$$

où l'on a définit

$$X_n \coloneqq \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ a_p & \cdots & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$

52. Exemple. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite complexe vérifiant

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

pour deux complexes $a, b \in \mathbf{C}$. Notons $r, q \in \mathbf{C}$ les deux racines, comptées avec multiplicité, du polynôme $X^2 - aX - b \in \mathbf{C}[X]$.

- Si $r \neq q$, alors il existe deux constantes $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ telles que
$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_n = \lambda r^n + \mu q^n \ ;$$
- Si $r = q$, alors il existe deux constantes $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ telles que
$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_n = (\lambda + \mu n) r^n.$$

53. Exemple. La *suite de Fibonacci* $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par les relations

$$F_0 = F_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \qquad n \in \mathbf{N}$$

s'écrit sous la forme

$$F_n = \frac{\varphi^n - \tilde{\varphi}^n}{\sqrt{5}}, \qquad n \in \mathbf{N}$$

avec $\varphi \coloneqq (1+\sqrt{5})/2$ et $\tilde{\varphi} \coloneqq (1-\sqrt{5})/2$.

[1] Mohammed El Amrani. *Suites et séries numériques. Suites et séries de fonctions.* Ellipses, 2011.
[2] Xavier Gourdon. *Analyse.* 2e édition. Ellipses, 2008.
[3] François Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel.* Quatrième édition. Cassini, 2015.