Erdos-Ginzburg-Ziv

Pierron Théo

6 janvier 2014

<u>Théorème 1</u> Chevalley-Warning *Soit p premier et $q = p^r$. Soit $f_i \in \mathbb{F}_q[X_1, \ldots, X_m]$ tel que $\sum \deg(f_i) < m$. Alors*

$$|\{x, \forall i, f_i(x) = 0\}| = 0 \mod p$$

<u>Théorème 2</u> Erdos-Ginzburg-Ziv *Pour tout $n \geqslant 2$, pour tout $a_1, \ldots, a_{2n-1} \in \mathbb{Z}^{2n-1}$, il existe $i_1, \ldots, i_n \in [\![1, 2n-1]\!]^n$ tel que*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_j} = 0 \mod n$$

Démonstration. Soit EGZ l'ensemble des n vérifiant le théorème.

- Soit p premier, $a_1, \ldots, a_{2p-1} \in \mathbb{Z}^{2p-1}$. On définit les polynômes de $\mathbb{F}_p[X_1, \ldots, X_{2p-1}]$:

$$P_1 = \sum_{k=1}^{2p-1} X_i^{p-1} \text{ et } P_2 = \sum_{k=1}^{2p-1} a_i X_i^{p-1}$$

  Soit $V = \{x, P_1(x) = P_2(x) = 0\}$. $0 \in V$ donc $|V| > 1$. De plus, $\deg(P_1) + \deg(P_2) = 2p-2 < 2p-1$ donc par le théorème de Chevalley-Warning, $|V| = 0 \mod p$. Donc il existe $(x_1, \ldots, x_{2p-1}) \in V \setminus \{0\}$.

$$0 = P_1(x_1, \ldots, x_{2p-1}) = |\{i, x_i \neq 0\}| \mod p$$

  Donc $|\{i, x_i \neq 0\}| \in p\mathbb{N} \cap [\![1, 2p-1]\!] = \{p\}$ donc exactement p composantes de x sont non nulles. Notons-les $i_1, \ldots, i_p$. Alors

$$0 = \sum_{j=1}^{p} a_{i_j} x_{i_j}^{p-1} = \sum_{j=1}^{p} a_{i_j}$$

  Donc p appartient à EGZ.
- Soient m, n dans EGZ et $a_1, \ldots, a_{2mn-1} \in \mathbb{Z}^{2mn-1}$.

  De $a_1, \ldots, a_{2m-1}$, on extrait $i_{1,1}, \ldots, i_{m,1}$ tel que $m \left| \sum_{j=1}^{m} a_{i_{j,1}} =: S_1 \right.$.

  Des $2mn - m - 1$ entiers restants, on extrait $i_{1,2}, \ldots, i_{m,2}$ tel que $m \left| \sum_{j=1}^{m} a_{i_{j,2}} =: S_2 \right.$.

  On réitère le procédé jusqu'à ce qu'il reste moins de $2m - 1$ entiers. Comme $2mn - 1 = (2n-1)m + m - 1$, on l'a réitéré $2n - 1$ fois.
  Alors $\frac{S_1}{m}, \ldots, \frac{S_{2n-1}}{m}$ forment une famille de $2n - 1$ entiers, donc il existe $k_1, \ldots, k_n$ tel que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{S_{k_j}}{m} = 0 \bmod n$. D'où

$$nm \left| \sum_{j=1}^{n} S_{k_j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{i_{k,k_j}} \right.$$

  Donc nm appartient à EGZ.

- Ainsi, EGZ contient les nombres premiers et il est stable par multiplication donc c'est $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. ■

Remarque 1 $2n-1$ *est optimal. En effet, soit* x *le* $(2n-2)$*-uplet constitué de* $n-1$ *fois* 0 *et* $n-1$ *fois 1. Alors tout sous-n-uplet de* x *a une somme comprise entre* 1 *et* $n-1$ *donc ne peut pas être multiple de* n*.*