Théorème de Cauchy-Lipschitz global

Pierron Théo

5 janvier 2014

<u>Théorème</u> *Soit I un intervalle, $t_0 \in I$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue telle que*

$$\forall t_0 \in K \subset I \text{ compact}, \exists k > 0, \forall (t, y, z) \in K \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \|f(t, y) - f(t, z)\| \leqslant k \|y - z\|$$

Alors il existe un unique $y : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable vérifiant

$$(S) \colon \begin{cases} y'(t) & = f(t, y(t)) \\ y(t_0) & = x \end{cases}$$

Démonstration. Soit $E = C^0(I, \mathbb{R}^n)$.

- Supposons d'abord I compact et notons l son diamètre. On définit pour $y \in E$ et $t \in I$,

  $$F(y)(t) = x + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) \, \mathrm{d}s$$

  Si $y : I \to \mathbb{R}^n$ est dérivable et vérifie S alors en intégrant,

  $$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) \, \mathrm{d}s = F(y)(t)$$

  Donc $y = F(y)$ et $y \in E$.
  Réciproquement si $y \in E$ vérifie $y = F(y)$ alors $t \mapsto f(t, y(t))$ est continue donc $y = F(y)$ est dérivable donc

  $$y'(t) = F(y)'(t) = f(t, y(t))$$

  De plus $y(t_0) = F(y)(t_0) = x$ donc y est solution de (S).
- I est compact donc il existe une constante de lipschitz $k > 0$ globale sur I. Définissons alors sur E l'application

  $$\|y\|_k = \max_{t \in I} (\mathrm{e}^{-k|t-t_0|} \|y(t)\|)$$

  qui est bien définie sur E car $t \mapsto \mathrm{e}^{-k|t-t_0} \|y(t)\|$ est continue sur le compact I. Cette application est clairement une norme sur E.
  On a de plus pour tout $y \in E$,

  $$\|y\|_\infty \mathrm{e}^{-kl} \leqslant \|y\|_k \leqslant \|y\|_\infty$$

  Donc $\|\cdot\|_k$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes et comme I est compact, E est complet pour la topologie définie par chacune de ces deux normes.
- Soit maintenant $y, z \in E$. On a si $t \geqslant t_0$,

  $$\begin{aligned} \|F(y)(t) - F(z)(t)\| &\leqslant \int_{t_0}^{t} \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\| \, \mathrm{d}s \leqslant k \int_{t_0}^{t} \|y(s) - z(s)\| \, \mathrm{d}s \\ &\leqslant k \|y - z\|_k \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{k(s-t_0)} \, \mathrm{d}s \leqslant (\mathrm{e}^{k(t-t_0)} - 1) \|y - z\|_k \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{e}^{-k(t-t_0)} \|F(y)(t) - F(z)(t)\| \leqslant (1-\mathrm{e}^{-k(t-t_0)}) \|y - z\|_k$. De même si $t \leqslant t_0$, on a avec des intégrales de t à t_0 :

$$\mathrm{e}^{-k(t-t_0)} \|F(y)(t) - F(z)(t)\| \leqslant (1 - \mathrm{e}^{-k(t-t_0)}) \|y - z\|_k$$

Donc finalement, on a l'inégalité pour tout t et en passant au sup,

$$\|F(y) - F(z)\|_k \leqslant (1 - \mathrm{e}^{-kl}) \|y - z\|_k$$

$1-\mathrm{e}^{-kl} < 1$ donc F est une application contractante dans l'espace $(E, \|\cdot\|_k)$ qui est complet. Elle admet donc un unique point fixe noté y (qui est donc solution de (S)).

- Supposons maintenant I intervalle quelconque. Il existe $(K_n)_n$ une suite croissante de compacts contenant t_0 tels que $I = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$.
  Notons y_n l'unique solution de (S) sur K_n.
  Alors si y est solution de S sur I, alors pour tout n, $y|_{K_n} = y_n$ par unicité de la solution sur K_n.
  Réciproquement, la fonction $y : t \mapsto y_n(t)$ si $t \in K_n$ est bien définie sur I car par unicité $y_{n+1}|_{K_n} = y_n$ et constitue bien une solution de (S). On a donc trouvé l'unique solution de (S) sur I. ■