Isométries des solides de Platon sympathiques

Pierron Théo

8 juin 2014

Soit T un tétraèdre, C un cube et O un octaèdre.

<u>Théorème 1</u> $\mathrm{Isom}(T) \simeq \mathfrak{S}_4$ *et* $\mathrm{Isom}^+(T) \simeq \mathfrak{A}_4$.

Démonstration. On fait agir $\mathrm{Isom}(T)$ sur les sommets de T. Comme il y a 4 sommets, on en déduit un morphisme $\varphi : \mathrm{Isom}(T) \to \mathfrak{S}_4$.

$\mathrm{Ker}(\varphi)$ est l'ensemble des isométries qui fixent chaque sommet de T. Comme ces sommets forment un repère affine, seule l'identité vérifie cette condition donc φ est injectif.

Pour prouver la surjectivité, il suffit d'exhiber une isométrie qui échange deux sommets. On considère la symétrie par rapport au plan médiateur d'une arête. Cette symétrie échange les deux sommets de l'arête et ne touche pas aux autres. Comme les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_4$, on a gagné.

$\det \circ \varphi^{-1}$ est alors un morphisme non trivial de $\mathfrak{S}_4$ dans $\{\pm 1\}$. On a donc $\det = \varepsilon \circ \varphi$.

$\mathrm{Isom}^+(T) = \mathrm{Ker}(\det) \simeq \mathrm{Ker}(\varepsilon) = \mathfrak{A}_4$ ce qui conclut. ∎

On a alors un dictionnaire entre permutations et isométries :

- 3-cycles : rotations d'axe perpendiculaire à une face passant par le sommet opposé, d'angle $\pm \frac{2\pi}{3}$
- 4-cycles : symétries-rotations de plan un plan médiateur à une arête et de rotation choisie comme précédemment, telle que l'axe n'appartienne pas au plan.
- doubles transpositions : rotations d'angle π d'axe une droite joignant les milieux d'une paire d'arêtes opposées.

Lemme

Soient H, N deux sous-groupes distingués d'un groupe G tels que $|H||N| = |G|$ et $H \cap N = \{1\}$. Alors $G \simeq H \times N$.

Démonstration. On considère :

$$f : \begin{cases} H \times N & \to & G \\ (h,n) & \mapsto & hn \end{cases}$$

f est injective car si $h_1 n_1 = h_2 n_2$, alors $h_2^{-1} h_1 = n_2 n_1^{-1} \in H \cap N$ donc $(h_1, h_2) = (n_1, n_2)$. Par égalité des cardinaux, f est une bijection. Reste à montrer que c'est un morphisme de groupes i.e. que

$$h_1 n_1 h_2 n_2 = h_1 h_2 n_1 n_2$$

Ceci est équivalent à $n_1 h_2 = h_2 n_1$ ou encore à $h_2^{-1} n_1 h_2 n_1^{-1} = 1$. N et H sont distingués dans G donc

- $n_1 h_2 n_1^{-1} \in H$ donc $h_2^{-1} n_1 h_2 n_1^{-1} \in H$
- $h_2^{-1} n_1 h_2 \in N$ donc $h_2^{-1} n_1 h_2 n_1^{-1} \in N$

Ainsi, $h_2^{-1} n_1 h_2 n_1^{-1} \in H \cap N = \{1\}$ donc on a bien

$$f(h_1, n_1) f(h_2, n_2) = h_1 n_1 h_2 n_2 = h_1 h_2 n_1 n_2 = f(h_1 h_2, n_1 n_2)$$

Donc f est un isomorphisme de groupes. ∎

<u>THÉORÈME 2</u> $\mathrm{Isom}(C)^+ \simeq \mathfrak{S}_4$ *et* $\mathrm{Isom}(C) \simeq \mathfrak{S}_4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Démonstration. On fait agir $\mathrm{Isom}(C)$ sur les grandes diagonales du cube. Comme les isométries préservent les distances, on envoie bien une grande diagonale sur une grande diagonale. On a donc un morphisme $\varphi : \mathrm{Isom}(C) \to \mathfrak{S}_4$.

Soit $f \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. f préserve les 4 grandes diagonales. Soit AB une grande diagonale. Supposons $f(A) = B$. Alors par préservation des distances, f doit aussi échanger les extrêmités de toutes les grandes diagonales. Donc f est la symétrie de centre le centre du cube. Donc $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{\mathrm{Id}, s\} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

On remarque que $s \notin \mathrm{Isom}^+(C)$ donc $\varphi|_{\mathrm{Isom}^+(C)}$ est injectif. On obtient la surjectivité en voyant que la rotation d'angle π autour d'une droite passant par les milieux de deux arêtes opposées agit comme une transposition.

Donc $\mathrm{Isom}^+(C) \simeq \mathfrak{S}_4 \simeq \mathrm{Isom}(C)/\{\mathrm{Id}, s\}$. En particulier $2|\mathrm{Isom}^+(C)| = |\mathrm{Isom}(C)|$.

$\{\mathrm{Id}, s\} \lhd \mathrm{Isom}(C)$ car $\{\mathrm{Id}, s\} \subset Z(\mathrm{Isom}(C))$. De plus, $\mathrm{Isom}^+(C) \lhd \mathrm{Isom}(C)$ car il est d'indice 2. Comme on a évidemment $\mathrm{Isom}^+(X) \cap \{\mathrm{Id}, s\} = \{\mathrm{Id}\}$, le lemme permet de conclure à

$$\mathrm{Isom}(C) \simeq \mathrm{Isom}^+(C) \times \{\mathrm{Id}, s\} \simeq \mathbb{S}_4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \qquad \blacksquare$$

On peut encore établir un dictionnaire :

- 3-cycles : rotation d'axe une grande diagonale et d'angle $\pm\frac{2\pi}{3}$.
- 4-cycles : rotation d'axe passant par les centre de faces opposées et d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$.
- doubles transpositions : rotation d'axe passant par les centre de faces opposées et d'angle π.

<u>THÉORÈME 3</u> $\mathrm{Isom}(O)^+ \simeq \mathfrak{S}_4$ *et* $\mathrm{Isom}(O) \simeq \mathfrak{S}_4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que C et O sont duaux : il existe un cube C' tel que les sommets de O coïncident avec les centres des faces de C'. Alors par préservation des barycentres, toute isométrie de C' est une isométrie de O et $\mathrm{Isom}(C') \subset \mathrm{Isom}(O)$.

De même, il existe un cube C'' tel que les sommets de C'' coïncident avec les centres des faces de O. Toute isométrie de O est une isométrie de C'' donc $\mathrm{Isom}(O) \subset \mathrm{Isom}(C'')$.

Comme $\mathrm{Isom}(C') \simeq \mathrm{Isom}(C'') \simeq \mathrm{Isom}(C)$, on a bien

$$\mathrm{Isom}(O) \simeq \mathrm{Isom}(C) \qquad \blacksquare$$