Ellipsoïde de John–Lœwner

Pierron Théo

6 janvier 2014

Lemme
Pour tout $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ distinctes et $t \in]0,1[$, on a :

$$\det(tA + (1-t)B) > \det(A)^t \det(B)^{1-t}$$

<u>Théorème</u> *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide. Il existe un unique ellipsoïde centré en 0, de volume minimal contenant K.*

Par la suite on note Q^+ (resp Q^{++}) l'ensemble des formes quadratiques définies (resp. définies positives) de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Tout ellipsoïde centré en 0 a une équation du type $q(x) = 1$ pour un certain $q \in Q^{++}$. Son volume est celui du domaine E_q qu'il délimite, dont une équation est $q(x) \leqslant 1$.

La matrice M_q de q dans la base canonique est symétrique définie positive donc elle est diagonalisable en base orthonormée et n'a que des valeurs propres strictement positives. Autrement dit, quitte à changer de base (orthonormée), on peut se ramener à $q(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i x_i^2$ avec $a_i > 0$. Le volume de E_q est alors

$$\begin{aligned} V_q &= \int \cdots \int_{q(x)\leqslant 1} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \int \cdots \int_{\sum_{i=1}^n a_i x_i^2 \leqslant 1} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{a_1 \cdots a_n}} \int \cdots \int_{\sum_{i=1}^n x_i^2 \leqslant 1} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \frac{V}{\sqrt{\det(q)}} \end{aligned}$$

où V est le volume de $B(0,1)$ et $\det(q)$ est indépendant de la base choisie.

Minimiser V_q revient donc à maximiser $\det(q)$ sur l'ensemble $\{q \in Q^{++}, \forall x \in K, q(x) \leqslant 1\}$.

Soit $\Gamma = \{q \in Q^+, \forall x \in K, q(x) \leqslant 1\}$. On va maximiser $\det(q)$ sur Γ et montrer que tout maximiseur est dans Q^{++}.

- Γ est convexe : Soit $q, q' \in \Gamma$, $t \in [0,1]$.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $q(x) \geqslant 0$ et $q'(x) \geqslant 0$ donc $(tq+(1-t)q')(x) \geqslant 0$. Donc $tq+(1-t)q' \in Q^+$
  Pour tout $x \in K$, $q(x) \leqslant 1$ et $q'(x) \leqslant 1$ donc $(tq + (1-t)q')(x) \leqslant t + 1 - t = 1$. Donc $tq + (1-t)q' \in \Gamma$.
- Γ est non vide : K est compact donc borné donc $K \subset B(0, M)$ pour $M > 0$.
  $q : x \mapsto \frac{\|x\|^2}{M^2}$ est définie positive et pour tout $x \in K$, $q(x) \leqslant 1$ donc $q \in \Gamma$.
- Γ est fermé : Soit $(q_n)_n \in \Gamma$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = q$ avec q une forme quadratique.
  Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $|q_n(x) - q(x)| \leqslant \|q_n - q\| \, \|x\|^2 \to 0$ donc $q_n(x)$ converge vers $q(x)$. Par conservation des inégalités larges, on obtient que $q(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et que $q(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in K$. Donc $q \in \Gamma$.

– Γ est borné : K est d'intérieur non vide donc il existe $a \in K$ et $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset K$.
  Soit $q \in \Gamma$. Si $\|x\| < r$, $a + x \in K$ donc $q(a + x) \leqslant 1$. Par inégalité de Minkowski, on a

$$\sqrt{q(x)} \leqslant \sqrt{q(a+x)} + \sqrt{q(-a)} \leqslant 1 + \sqrt{q(a)} \leqslant 2$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $\|x\| \leqslant 1$, $q(x) = \frac{q(rx)}{r^2} \leqslant \frac{4}{r^2}$.

Ainsi, $\|q\| \leqslant \frac{4}{r^2}$.

Γ est donc compact convexe non vide donc l'application det (continue) y admet un maximum en q_0.

Notons que Γ contient $q : x \mapsto \frac{\|x\|^2}{M^2}$ (définie positive) donc $\det(q_0) \geqslant \det(q) > 0$. Donc $q_0 \in Q^{++}$.

On a donc trouvé un ellipsoïde de volume minimal contenant K. Montrons maintenant qu'il est unique. Soit $q \in \Gamma$ distinct de q_0 de déterminant maximal.

Γ est convexe donc $\frac{q+q_0}{2} \in \Gamma$ et par log-convexité du déterminant :

$$\det\left(\frac{q+q_0}{2}\right) = \det\left(\frac{M_q + M_{q_0}}{2}\right) > \sqrt{\det(M_q)}\sqrt{\det(M_{q_0})} = \det(M_{q_0}) = \det(q_0)$$

ce qui contredit la maximalité de $\det(q_0)$.

Ainsi, E_{q_0} est l'unique ellipsoïde centré en 0 et de volume minimal contenant K. ■