Théorème de Lie–Kolchin

Pierron Théo

22 décembre 2013

Lemme 1
Toute famille de matrices qui commutent 2 à 2 est co-trigonalisable.

Lemme 2
Si G est connexe, $D(G)$ est connexe.

<u>Théorème</u> *Tout sous-groupe connexe résoluble de $GL_n(\mathbb{C})$ est conjugué à un sous-groupe de $T_n(\mathbb{C})$.*

Démonstration. On procède par récurrence forte sur n, le cas $n = 1$ étant clair. Soit $n > 1$ et supposons le théorème vrai pour $m < n$.

- G est résoluble donc il existe m tel que $D^m(G) = \{1\}$ et $H := D^{m-1}(G) \neq \{1\}$. Par le lemme, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $PHP^{-1} \subset T_n(\mathbb{C})$. Quitte à remplacer G par PGP^{-1}, on peut supposer $H \subset T_n(\mathbb{C})$.
- Supposons que les seuls espaces stables par tous les éléments de G sont triviaux.
  e_1 est vecteur propre de h pour tout $h \in H$. Soit
  $$V = \mathrm{Vect}\,\{x, \forall h \in H, x \text{ est vecteur propre de } h\}$$
  $e_1 \in V$ donc $V \neq \{0\}$. Soit $g \in G, v \in V$.
  $$h(g(v)) = g(g^{-1}(h(g(v)))) = g(\lambda v) = \lambda g(v)$$
  car $H \lhd G$ donc $g^{-1}hg \in H$. Ainsi, V est stable pour tous les éléments de G donc $V = \mathbb{C}^n$. Quitte à conjuguer, on a $H \subset D_n(\mathbb{C})$.
- Soit $h \in H$. $H \lhd G$ donc H est stable par automorphismes intérieurs. $i_g : g \mapsto ghg^{-1}$ est continu donc son image est connexe. De plus pour tout $g \in G$, ghg^{-1} a les mêmes valeurs propres que h donc $\mathrm{Im}(i_g)$ est fini.
  Ainsi, $\mathrm{Im}(i_g)$ est un singleton (et contient h) donc $gh = hg$ donc $H \subset Z(G)$.
- Soit $W \neq \{0\}$ un espace propre de h. Alors, comme $h \in Z(G)$, W est stable par G. Ainsi, $W = \mathbb{C}^n$ donc $h = \lambda_h \,\mathrm{Id}$.
- Si $m - 1 \geqslant 1$, H est un groupe de commutateurs donc il est inclus dans $SL_n(\mathbb{C})$. Ainsi, pour tout $h \in H$, $\lambda_h^n = 1$ donc H est fini. Comme il est connexe, $H = \{\mathrm{Id}\}$, ce qui est absurde. Donc $m = 1$.
- $m = 1$ donc $D(G) = \{1\}$ donc G est abélien. Par le premier lemme, G est conjugué à un sous-groupe de $T_n(\mathbb{C})$. Alors $\mathbb{C}e_1$ est stable par G donc $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}e_1$ donc $n = 1$, ce qui est absurde. Par conséquent, il existe un sous-espace V non trivial stable par tout élément de G.
- Soit W un supplémentaire de V. Dans une base adaptée à $\mathbb{C}^n = V \oplus W$, tout $g \in G$ s'écrit $\begin{pmatrix} g_1 & u \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}$.
  Les applications $\varphi_i : g \mapsto g_i$ sont des morphismes continus surjectifs sur leur image. Donc $\mathrm{Im}(\varphi_i)$ sont connexes résolubles. Par hypothèse de récurrence, ces sous-groupes sont conjugués à des sous groupes de $T_n(V)$ et $T_n(W)$.

Soit b_V et b_W des bases dans lesquelles les éléments de $\mathrm{Im}(\varphi_i)$ sont triangulaires. La famille (b_V, b_W) est une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle les matrices de G sont triangulaires supérieures, ce qui conclut. $\blacksquare$