Théorème de Lyapunov

Pierron Théo

5 janvier 2014

Théorème *Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $f(0) = 0$. On pose $A = Df(0)$ et $\chi_A = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{m_i}$.*

Supposons que le système différentiel

$$(S) \colon \begin{cases} y'(t) & = f(y(t)) \\ y(0) & = x \end{cases}$$

admette une solution y.

Si pour tout i, $\Re(\lambda_i) < 0$, alors pour x assez proche de 0, $y(t)$ tend exponentiellement vers 0 lorsque t tend vers l'infini.

Démonstration.

1. On écrit $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I_n)^{m_i}$. Alors, avec cette décomposition, $x = \sum_{i=1}^{r} x_i$ avec $x_i \in \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I_n)^{m_i}$. Pour tout i, on a donc

$$\mathrm{e}^{tA} x_i = \mathrm{e}^{\lambda_i t} \mathrm{e}^{t(A - \lambda_i I_n)} x_i = \mathrm{e}^{\lambda_i t} \sum_{p=0}^{m_i - 1} \frac{t^p}{p!}(A - \lambda_i I_n)^p x_i$$

Donc

$$\left\|\mathrm{e}^{tA} x_i\right\| = \mathrm{e}^{t\Re(\lambda_i)} \|x_i\| \sum_{p=0}^{m_i - 1} \frac{|t|^p}{p!} \|A - \lambda_i I_n\|^p \leqslant \mathrm{e}^{t\Re(\lambda_i)} \|x_i\| \|A - \lambda_i I_n\|^{n-1} (1 + |t|)^{n-1}$$

Donc finalement

$$\left\|\mathrm{e}^{tA} x\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{r} \left\|\mathrm{e}^{tA} x_i\right\| \leqslant (1 + |t|)^{n-1} \max_{1 \leqslant i \leqslant r} \|x_i\| \max_{1 \leqslant i \leqslant r} \|A - \lambda_i I_n\|^{n-1} \sum_{i=1}^{r} \mathrm{e}^{t\Re(\lambda_i)}$$

Comme les normes sont équivalentes, il existe $C > 0$ tel que

$$\left\|\mathrm{e}^{tA} x\right\| \leqslant CP(|t|) \|x\| \sum_{i=1}^{r} \mathrm{e}^{t\Re(\lambda_i)}$$

où P est un polynôme.

Autrement dit, l'unique solution $z(t) = A\mathrm{e}^{tA} x$ du système linéarisé $z' = Az$ avec $z(0) = x$ tend vers 0 quand $t \to \infty$.

2. Soit $b(x, y) = \int_0^\infty \langle \mathrm{e}^{tA} x, \mathrm{e}^{tA} y \rangle \,\mathrm{d}t$. Par Cauchy-Schwartz,

$$|\langle \mathrm{e}^{tA} x, \mathrm{e}^{tA} y \rangle| \leqslant \left\|\mathrm{e}^{tA} x\right\| \left\|\mathrm{e}^{tA} y\right\| \leqslant C^2 \|x\| \|y\| \mathrm{e}^{-2at} P(|t|)^2$$

où $a = \min_{1 \leqslant i \leqslant r}(-\lambda_i) > 0$. Donc b est bien défini. b est de plus clairement linéaire et symétrique.

De plus, $b(x, x) = \int_0^\infty \left\|\mathrm{e}^{tA} x\right\|^2 \,\mathrm{d}t \geqslant 0$ et si $b(x, x) = 0$, la fonction continue $t \mapsto \left\|\mathrm{e}^{tA} x\right\|^2$ est d'intégrale nulle donc est nulle et $x = 0$. b définit donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Notons q la forme quadratique associée.

3. On a

$$\langle \nabla q(x), Ax\rangle = Dq(x)(Ax) = 2b(x, Ax) = 2\int_0^{\infty} \langle \mathrm{e}^{tA}x, A\mathrm{e}^{tA}x\rangle \,\mathrm{d}t = \left[\left\|\mathrm{e}^{tA}\right\|^2 x\right]_0^{\infty} = -\|x\|^2$$

Notons $r(y) = f(y) - Ay$. On a

$$\begin{aligned}(q \circ y)'(t) &= Dq(y(t))(y'(t)) = 2b(y(t), y'(t)) = 2b(y(t), Ay(t)) + 2b(y(t), r(y(t))) \\ &= -\|y(t)\|^2 + 2b(y(t), r(y(t)))\end{aligned}$$

4. Par définition de la différentielle (et l'équivalence des normes), il existe une fonction continue ε telle que $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ et pour tout y,

$$r(y) = f(y) - f(0) - Df(0)y = y\varepsilon(\sqrt{q(y)})$$

Donc $\sqrt{q(r(y))} \leqslant \sqrt{q(y)}\varepsilon(\sqrt{q(y)})$. Par équivalence des normes, il existe $C > 0$ tel que $C\sqrt{q(x)} \leqslant \|x\|$ pour tout x. Par continuité de ε, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout y,

$$q(y) \leqslant \alpha \Rightarrow \sqrt{q(r(y))} \leqslant \frac{C}{4}\sqrt{q(y)}$$

Alors, pour $q(y) \leqslant \alpha$, on a par Cauchy-Schwartz

$$|b(y, r(y))| \leqslant \sqrt{q(y)}\sqrt{q(r(y))} \leqslant \frac{C}{4}q(y)$$

Donc finalement, si $q(y(t)) \leqslant \alpha$,

$$(q \circ y)'(t) \leqslant -\|y(t)\|^2 + 2b(y(t), r(y(t))) \leqslant -\frac{C}{2}q(y(t))$$

5. Supposons que $q(x) < \alpha$. Montrons que pour tout t, $q(y(t)) \leqslant \alpha$.
Par l'absurde, supposons qu'il existe t_0 tel que $q(y(t_0)) \geqslant \alpha$. Par le TVI,

$$\{t, q(y(t)) = \alpha\} \neq \varnothing$$

donc son inf t_1 est bien défini et par continuité, $q(y(t_1)) = \alpha$. On peut donc appliquer l'inégalité précédente :

$$(q \circ y)'(t_1) \leqslant -\frac{C}{2}q(y(t_1)) = -\frac{C\alpha}{2} < 0$$

Donc pour $\eta > 0$ assez petit, $q(y(t - \eta)) > q(y(t)) = \alpha$. Par le TVI (encore), il existe $t \in [0, t_1 - \eta]$ tel que $q(y(t)) = \alpha$. On a alors $t < t_1$, ce qui contredit la définition de t_1. Ainsi, pour tout t, $q(y(t)) < \alpha$.

6. On a alors, avec $\beta = -\frac{C}{2}$,

$$(\mathrm{e}^{-\beta t}q(y(t)))' = \mathrm{e}^{-\beta t}((q \circ y)'(t) - \beta q(y(t))) \leqslant 0$$

Donc en intégrant, $q(y(t)) \leqslant \mathrm{e}^{\beta t}q(x)$.
En utilisant l'équivalence des normes encore une fois, on a $\lim\limits_{t\to\infty} \|y(t)\| = 0$ et la convergence est exponentielle. ■