Formule de Poisson et application

Pierron Théo

3 juin 2014

<u>Théorème 1</u> *Soit $f \in S(\mathbb{R})$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{2i\pi nx}$$

Remarque *Les hypothèses sur f sont violentes, on peut se restreindre à f C^1, $f(x) = O(x^{-a})$ et $f'(x) = O(x^{-a})$ avec $a > 1$ en $\pm\infty$.*

Démonstration. $f \in S(\mathbb{R})$ donc il existe $M > 0$ tel que pour tout $|x| > 1$, $|f(x)| \leqslant \frac{M}{x^2}$.

Pour tout $K > 0$, pour tout $x \in [-K, K]$ et $|n| > K + 1$, on a

$$|f(x+n)| \leqslant \frac{M}{(x+n)^2} \leqslant \frac{M}{(|n|-K)^2}$$

Donc la somme de gauche cvn sur tout compact vers une fonction F qui en devient continue.

On a de même la cvnl de $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f'(x+n)$, donc F est en fait C^1. De plus,

$$\forall x, \forall N, \sum_{n=-N}^{N} f(x+1+n) = \sum_{n=-N+1}^{N+1} f(x+n)$$

En passant à la limite en N, on a $F(x+1) = F(x)$ autrement dit F est 1-périodique et on peut fouriétiser. Calculons donc les coefficients de Fourier $c_n(F)$:

$$\int_0^1 F(t)\mathrm{e}^{-2i\pi nt}\,\mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(t+n)\mathrm{e}^{-2i\pi nt}\,\mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{e}^{-2i\pi nt}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-2i\pi nt}\,\mathrm{d}t$$

où on reconnaît $\widehat{f}(n)$.

La permutation somme intégrale est licite car la série cvnl et que le domaine d'intégration est compact. La dernière égalité est aussi raisonnable car $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-2i\pi nt}$ est intégrable.

Comme F est C^1, sa série de Fourier cvu vers F donc pour tout x,

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\mathrm{e}^{2i\pi nx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{2i\pi nx}$$

■

<u>Définition</u> On définit la fonction Θ par $\Theta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{n^2}$.

Proposition Θ est une série entière de rayon de convergence 1.

Démonstration. Θ est bien une série entière car pour tout z où elle est bien définie, $\Theta(z) = 2\sum_{n\in\mathbb{N}} z^{n^2} - 1$.

On a de plus divergence en 1 et pour tout z tel que $|z| < 1$, on a

$$|\Theta(z)| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} |z|^{n^2} \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} |z|^n < \infty$$

Donc on a bien un rayon de convergence égal à 1. ■

<u>THÉORÈME 2</u> *Pour $x \to 1^-$ réel, on a $\Theta(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$.*

Démonstration. Soit $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-\omega x^2}$ avec $\omega > 0$. $f \in S(\mathbb{R})$ donc on peut appliquer la formule de Poisson. On calcule d'abord $\widehat{f}(n)$:

$$\widehat{f}(n) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\omega x^2 - 2i\pi n x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\frac{\pi^2 n^2}{\omega}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\omega(x + \frac{i\pi n}{\omega})^2}\,\mathrm{d}x$$

On procède maintenant à une déformation de contour pour calculer cette intégrale. Soit γ le contour orienté dans le sens trigonométrique formant la frontière de $\{a + ib, a \in [-R, R], b \in [0, \frac{in\pi}{\omega}]\}$. Comme $z \mapsto \mathrm{e}^{-\omega z^2}$ est une brave fonction holomorphe, son intégrale sur γ est nulle. Ainsi,

$$\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-\omega x^2}\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi n}{\omega}} \mathrm{e}^{-\omega(R+it)^2}\,\mathrm{d}t + \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-\omega(x+\frac{i\pi n}{\omega})^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi n}{\omega}} \mathrm{e}^{-\omega(-R+it)^2}\,\mathrm{d}t$$

On a

$$|\mathrm{e}^{-\omega(\pm R+it)^2}| \leqslant \mathrm{e}^{-\omega(R^2-t^2)} \leqslant \mathrm{e}^{-\omega R^2}\mathrm{e}^{\frac{\pi^2 n^2}{\omega}}$$

Donc

$$\left|\int_0^{\frac{\pi n}{\omega}} \mathrm{e}^{-\omega(\pm R+it)^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \mathrm{e}^{-\omega R^2}\mathrm{e}^{\frac{\pi^2 n^2}{\omega}}\frac{\pi n}{\omega}$$

et quand $R \to \infty$, ces intégrales convergent vers 0. Finalement, en faisant tendre R vers $+\infty$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\omega(x+\frac{i\pi n}{\omega})^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\omega x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\omega}}$$

Finalement, on obtient

$$\widehat{f}(n) = \sqrt{\frac{\pi}{\omega}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2 n^2}{\omega}}$$

Par la formule de Poisson en $x = 0$, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) = \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\frac{\pi^2 n^2}{\omega}}$$

Ce qui se réécrit en

$$\Theta(\mathrm{e}^{-\omega}) = \sqrt{\frac{\pi}{\omega}}\Theta(\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2}{\omega}})$$

Prenons maintenant $\omega = -\log x$. On a $\Theta(x) = \sqrt{\frac{\pi}{-\log x}}\Theta(\mathrm{e}^{\frac{\pi^2}{\log(x)}})$. Et alors :

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{-\log(x)}\Theta(x) = \sqrt{\pi}\Theta(0) = \sqrt{\pi}$$

Donc $\Theta(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{-\log x}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$. ■