Sev de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ stable par translation

PIERRON Théo

8 juin 2014

Lemme
Soit $g_1, \dots, g_n$ des fonctions continues linéairement indépendantes. Alors il existe $x_1, \dots, x_n$ tels que

$$A := (f_i(x_j)) \in GL_n(\mathbb{C})$$

Démonstration. Soit $\Gamma = \text{Vect}\{\delta_x, x \in \mathbb{R}\}$. Alors

$$\Gamma^\perp = \{f, \forall x, \delta_x(f) = 0\} = \{f, \forall x, f(x) = 0\} = \{0\}$$

Donc, si $G = \text{Vect}\{g_1, \dots, g_n\}$, on a $\Gamma = G^*$.

La famille $(\delta_x)_{x\in\mathbb{R}}$ est donc génératrice. On extrait alors $x_1, \dots, x_n$ tel que $\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n}$ soit une base de G^*. Notons P la matrice de passage de la base duale des $(g_i)_i$ à $(\delta_{x_i})_i$. Alors

$$P = (f_i^{**}(\delta_{x_j}))_{i,j} = (\delta_{x_j}(f_i))_{i,j} = (f_i(x_j))_{i,j} = A$$

A est donc bien inversible. ∎

<u>THÉORÈME</u> *Soit $F \subset C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On note pour $a \in \mathbb{R}$, τ_a l'opérateur de translation $f \mapsto f(\cdot - a)$.*

Alors F est un sev de dimension finie n stable par les τ_a ssi

$$\exists P \in \mathbb{C}_n[X], F = \text{Ker}(P(D))$$

où D est l'opérateur de dérivation, i.e. c'est l'ensemble des solutions d'une EDO linéaire d'ordre n à coefficients constants.

Démonstration.

- $\Leftarrow$ Par Cauchy-Lipschitz, F est bien un sev de dimension n. Comme P est à coefficients constants, on est en présence d'une équation autonome. En particulier toute translatée d'une solution le reste.
- $\Rightarrow$ Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base de F. On sait que pour tout a, $\tau_{-a}(f_i) \in F$ donc il existe $\lambda_{i,j}(a)$ des réels tels que

  $$\tau_{-a} f_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j}(a) f_j$$

  Notons F_i la primitive de f_i nulle en 0. Alors en intégrant l'équation précédente, on obtient

  $$F_i(t + a) - F_i(a) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j}(a) F_j(t)$$

  $(F_1, \dots, F_n)$ est une famille libre car $(f_1, \dots, f_n)$ l'est. Par le lemme, on a $(x_1, \dots, x_n)$ tels que $A := (F_i(x_j))_{i,j}$ soit inversible. L'équation précédente évaluée en $t = x_1, \dots, x_n$ traduit alors le fait que

  $$B(a) = A\Lambda(a)$$

où $B(a)$ est la matrice des $(F_i(x_j+a)-F_i(a))_{i,j}$ et $\Lambda(a)$ celle des $(\lambda_{i,j}(a))_{i,j}$.
On peut alors inverser A : $\Lambda(a) = A^{-1}B(a)$. Les F_i étant C^1, $a \mapsto B(a)$ est aussi C^1, il en est donc de même de Λ, a fortiori de chaque $\lambda_{i,j}$. Évaluons

$$\tau_{-a} f_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j}(a) f_j$$

en 0. On obtient :

$$f_i(a) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j}(a) f_j(0)$$

Donc $f_i \in C^1$. On dérive alors en $a = 0$:

$$f_i'(t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j}'(0) f_j(t)$$

Donc $f_i' \in F$ et F est stable par l'opérateur de dérivation D. Notons μ le polynôme minimal de $D|_F$. Par Cayley-Hamilton, $\deg \mu \leqslant n$. De plus

$$F \subset \operatorname{Ker}(\mu(D))$$

et $\dim \operatorname{Ker}(\mu(D)) = \deg \mu$ par Cauchy-Lipschitz. On a donc $\deg \mu = n$ et $F = \operatorname{Ker}(\mu(D))$.
■