Sous-algèbre réduite de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$

Pierron Théo

12 juin 2014

Lemme
Soit U inversible et N nilpotente qui commutent. Alors $U-N$ est inversible.

<u>Théorème</u> *Soit $\mathcal{A} \subset \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ une sous-algèbre associative dont le seul nilpotent est 0. Alors les éléments de $\mathcal{A}$ sont codiagonalisables.*

Démonstration.

- Soit $M = A + \lambda I_n \in \mathcal{A} + \mathbb{C}I_n$ nilpotente.
  Si $\lambda = 0$, $M = A$ est nilpotente donc $M = 0$.
  Sinon, $A + \lambda I_n$ est nilpotente donc A est inversible. On a donc $A^2 + \lambda A \in \mathcal{A}$ nilpotente. Donc $A^2 = -\lambda A$ et $A = -\lambda I_n$. Ainsi, $M = 0$ donc $\mathcal{A} + \mathbb{C}I_n$ est réduite. On peut donc supposer que $\mathcal{A}$ contient I_n.
- Soit $A \in \mathcal{A}$. On écrit $\chi_A = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$.
  On pose $P = \frac{\chi_A}{\chi_A \wedge \chi_A'} = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)$. Alors
  $$\chi_A | P^{\max \alpha_i}$$
  donc $P^{\max \alpha_i}(A) = 0$ et $P(A)$ est nilpotent. Comme $I_n \in \mathcal{A}$, $\mathbb{C}[A] \subset \mathcal{A}$ donc $P(A) \in \mathcal{A}$. Finalement $P(A) = 0$ donc A est annulée par un polynôme scindé à racines simples donc A est diagonalisable.
- On écrit alors $\mathbb{C}^n = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I_n)$. On définit les polynômes d'interpolation :
  $$L_i = \prod_{j=1}^{r} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$$
  Posons alors $p_i = L_i(A) \in \mathcal{A}$. Si $x \in \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I_n)$, on a
  $$\begin{aligned} p_i(x) &= \frac{(A - \lambda_1 I_n) \circ \cdots \circ (A - \lambda_{i-1} I_n) \circ (A - \lambda_{i+1} I_n) \circ \cdots (A - \lambda_r I_n)}{(\lambda_i - \lambda_1) \circ \cdots \circ (\lambda_i - \lambda_{i-1}) \circ (\lambda_i - \lambda_{i+1}) \circ \cdots (\lambda_i - \lambda_r)}(x) \\ &= \frac{(A - \lambda_1 I_n) \circ \cdots \circ (A - \lambda_{i-1} I_n) \circ (A - \lambda_{i+1} I_n) \circ \cdots (A - \lambda_{r-1} I_n)}{(\lambda_i - \lambda_1) \circ \cdots \circ (\lambda_i - \lambda_{i-1}) \circ (\lambda_i - \lambda_{i+1}) \circ \cdots (\lambda_i - \lambda_{r-1})}(x) = \cdots = x \end{aligned}$$
  Si $x \in \mathrm{Ker}(A - \lambda_k I_n)$,
  $$p_i(x) = \left(\prod_{j \notin \{i,k\}} \frac{A - \lambda_j I_n}{\lambda_i - \lambda_j} \right) \circ \left(\frac{Ax - \lambda_k x}{\lambda_i - \lambda_k} \right) = 0$$
  Donc p_i est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(A - \lambda_i I_n)$ parallèlement à $\displaystyle\bigoplus_{j \neq i} \mathrm{Ker}(A - \lambda_j I_n)$.

Comme $\sum_{i=1}^{r} p_i = I_n$, on a $A = \sum_{i=1}^{r} A p_i = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i$. Donc A est combinaison linéaire de projecteurs. Ainsi, $\mathcal{A}$ est engendrée par les projecteurs.

- Soit B un projecteur de $\mathcal{A}$. On a

$$\begin{aligned}(BAB - BA)^2 &= BABBAB - BABBA - BABAB + BABA \\ &= BABAB - BABA - BABAB + BABA = 0 \\ (BAB - AB)^2 &= BABBAB - BABAB - ABBAB + ABAB \\ &= BABAB - BABAB - ABAB + ABAB = 0\end{aligned}$$

  Donc $BAB - BA$ et $BAB - AB$ sont nilpotentes donc nulles : $AB = BAB = BA$.
  A commute avec tous les projecteurs de $\mathcal{A}$ donc avec tout élément de $\mathcal{A}$.
- $\mathcal{A}$ est une algèbre commutative formée d'éléments diagonalisables. Elle est donc codiagonalisable. ∎