Théorème de Stampacchia

Pierron Théo

12 juin 2014

Théorème 1 *Soit H un espace de Hilbert, K un convexe fermé non vide. On prend a une forme bilinéaire continue coercive, i.e. il existe $C > 0$ et $\alpha > 0$ tel que*

$$\forall u, v \in H, |a(u, v)| \leqslant C \|u\| \|v\| \text{ et } a(u, u) \geqslant \alpha \|u\|^2$$

Alors pour tout $\varphi \in H'$, il existe un unique $u \in K$ tel que pour tout $v \in K$,

$$a(u, v-u) \geqslant \varphi(v-u)$$

Démonstration. Par Riesz, il existe un unique $f \in H$ tel que pour tout $v \in H$, $\varphi(v) = \langle f, v\rangle$.

De même, $v \mapsto a(u, v)$ est une forme linéaire continue, donc il existe $Au \in H$ tel que pour tout v,

$$a(u, v) = \langle Au, v\rangle$$

Par unicité dans Riesz, on a $Au + Av = A(u + v)$ et $A(\lambda u) = \lambda Au$. Ainsi A est une application linéaire. On remarque maintenant que :

$$\langle Au, u\rangle = a(u, u) \geqslant \alpha \|u\|^2$$

et

$$\|Au\|^2 = \langle Au, Au\rangle = a(u, Au) \leqslant C \|u\| \|Au\| \leqslant C \|Au\| \|u\|$$

Donc $\|Au\| \leqslant \sqrt{C} \|u\|$.

Soit $u \in K$. Alors

$$\begin{aligned} \forall v \in K, a(u, v-u) \geqslant \varphi(v-u) \quad & \text{ssi} \quad \forall v \in K, \langle Au, v-u\rangle \geqslant \langle f, v-u\rangle \\ & \text{ssi} \quad \forall v \in K, \forall \rho > 0, \langle \rho f - \rho Au, v-u\rangle \leqslant 0 \\ & \text{ssi} \quad \forall v \in K, \forall \rho > 0, \langle (\rho f - \rho Au + u) - u, v-u\rangle \leqslant 0 \\ & \text{ssi} \quad u = P_K(\rho f - \rho Au + u) \end{aligned}$$

où P_K est l'opérateur de projection sur K. On s'est donc ramené à une équation de point fixe. Pour $v \in K$, on pose alors

$$S_v = P_K(\rho f - \rho Av + v)$$

Adaptons ρ pour que S_v soit contractante. Soient $v_1, v_2 \in K$.

$$\begin{aligned} \|Sv_1 - Sv_2\|^2 &= \|P_K(v_1 - v_2 - \rho(Av_1 - Av_2))\|^2 \\ &\leqslant \|v_1 - v_2 - \rho(Av_1 - Av_2)\|^2 \\ &= \|v_1 - v_2\| - 2\rho\langle v_1 - v_2, Av_1 - Av_2\rangle + \rho^2 \|Av_1 - Av_2\|^2 \\ &\leqslant \|v_1 - v_2\|^2 (1 - 2\alpha\rho + \rho^2 C) \end{aligned}$$

Pour $0 < \rho < \frac{2\alpha}{C}$, on a $1 - 2\alpha\rho + \rho^2 C < 1$ donc S est contractante.

K est fermé dans un complet donc complet. Par Picard, on a donc un unique point fixe $u \in K$ de S qui est bien le u recherché. ∎

Théorème 2 *Sous les hypothèses précédentes, si de plus a est symétrique, alors u est caractérisé par $u \in K$ et $J(u) = \min_K J$ où*

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u)$$

Démonstration. Par continuité et coercivité, $u \mapsto \sqrt{a(u,u)}$ est une norme équivalente à la norme $\|\cdot\|$. H est donc un Hilbert pour cette nouvelle norme. On applique alors Riesz : il existe un unique $g \in H$ tel que $\varphi(v) = a(g,v)$ pour tout v.

Alors

$$\forall v \in K, a(u, v-u) \geqslant \varphi(v-u) \quad \text{ssi} \quad \forall v \in K, a(g-u, v-u) \leqslant 0 \quad \text{ssi} \quad u = P'_K(g)$$

où P'_K est la projection sur K pour la nouvelle norme.

En utilisant les caractérisations du projeté, on a

$$\begin{aligned} u = P'_K(g) \quad & \text{ssi} \quad \sqrt{a(g-u, g-u)} = \min_{v \in K} \sqrt{a(g-v, g-v)} \\ & \text{ssi} \quad a(g-u, g-u) = \min_{v \in K} a(g-v, g-v) \\ & \text{ssi} \quad a(u,u) - 2a(g,u) = \min_{v \in K} a(v,v) - 2a(g,v) \\ & \text{ssi} \quad J(u) = \min_{v \in K} J(v) \end{aligned}$$

Ce qui conclut. ∎