Endomorphismes de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ préservant $GL_n(\mathbb{C})$

Pierron Théo

5 janvier 2014

<u>Théorème</u> *Soit φ endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.*
φ stabilise $GL_n(\mathbb{C})$ ssi φ préserve le rang.

Lemme 1
Pour tout $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ non inversible, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $P - \lambda M \in GL_n(\mathbb{C})$.

Démonstration. $r := \operatorname{rg}(M) < n$. Si $r = 0$, le résultat est clair.

Sinon, il existe $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $M = A^{-1} K_r B$ avec $K_r = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors pour $P = AB$, on a $P^{-1}M = B^{-1}K_r B$ nilpotente donc son spectre est $\{0\}$. Finalement, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\det(P - \lambda M) = \det(P)\det(I_n - \lambda P^{-1}M) = \begin{cases} \lambda^n \det(P)\det(\frac{1}{\lambda}I_n - P^{-1}M) & \text{si } \lambda \neq 0 \\ \det(P) & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc $\det(P - \lambda M) \neq 0$. ■

Lemme 2
Pour tout $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ de rang $r < n$, il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $Q - \lambda M \notin GL_n(\mathbb{C})$ pour exactement r valeurs de λ.

Démonstration. Comme précédemment, il existe $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $M = AJ_rB$ avec

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Posons $D = \operatorname{diag}(1, \dots, n)$ et $Q = ADB \in GL_n(\mathbb{C})$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\det(Q - \lambda M) = \det(AB)\det(D - \lambda J_r) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in [\![1, r]\!]$$

Donc Q convient. ■

Démonstration du théorème. Soit φ endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

$\Leftarrow$ Si φ préserve le rang il stabilise l'ensemble des matrices de rang n donc $GL_n(\mathbb{C})$.

$\Rightarrow$ Soit φ stabilisant $GL_n(\mathbb{C})$.

- Montrons que $\varphi(GL_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})$.
  Si $M \notin GL_n(\mathbb{C})$, $r := \operatorname{rg}(M) < n$ donc (lemme 1) il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $P + \mathbb{C}M \subset GL_n(\mathbb{C})$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

  $$\varphi(P) - \lambda\varphi(M) = \varphi(P - \lambda M) \in GL_n(\mathbb{C})$$

  donc $I_n - \lambda\varphi(M)\varphi(P)^{-1} \in GL_n(\mathbb{C})$.
  Ainsi, $\varphi(M)\varphi(P)^{-1}$ a pour unique valeur propre 0 donc est nilpotent et, a fortiori, n'est pas inversible. Donc $\varphi(M) \notin GL_n(\mathbb{C})$.

- Montrons que $\mathrm{rg}(\varphi(M)) \geqslant \mathrm{rg}(M)$ pour tout M. Le cas M inversible est clair.
  Si $\mathrm{rg}(M) = r < n$, alors (lemme 2) il existe Q tel que $Q - \lambda M$ est inversible sauf pour r valeurs de λ. Pour λ différent de ces valeurs, $\varphi(Q) - \lambda\varphi(M)$ est inversible donc $I_n - \lambda\varphi(Q)^{-1}\varphi(M)$ aussi.
  Donc $\varphi(Q)^{-1}\varphi(M)$ a au plus r valeurs propres distinctes et non nulles donc
  $$\mathrm{rg}(\varphi(Q)^{-1}\varphi(M)) \geqslant r.$$
  En particulier, $\mathrm{rg}(\varphi(M)) \geqslant r = \mathrm{rg}(M)$.
- Conclusion :
  Si $\mathrm{rg}(\varphi(M)) = 0$, $\mathrm{rg}(M) \leqslant 0$ donc $M = 0$. Ainsi φ est injectif donc bijectif. $\varphi(GL_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})$ donc φ^{-1} stabilise aussi $GL_n(\mathbb{C})$. On a alors
  $$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(\varphi^{-1}(\varphi(M))) \geqslant \mathrm{rg}(\varphi(M)) \geqslant \mathrm{rg}(M)$$
  Donc φ conserve le rang. ■