Groupes de pavage du plan

Pierron Théo

4 juin 2014

Définition Un groupe de pavage du plan est un sous-groupe G des isométries positives du plan affine $\mathbb{R}^2$ tels qu'il existe P compact connexe d'intérieur non vide tel que :

- $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{g \in G} gP$
- si $g\mathring{P} \cap h\mathring{P} \neq \varnothing$, alors $g = h$.

Par la suite, G désigne un groupe de pavage. On note T le sous-groupe de $\mathbb{R}^2$ formé des vecteurs provenant des translations de G.

Proposition 1 T est un groupe discret, autrement dit un réseau.

Démonstration. Supposons par l'absurde que T ne soit pas discret. Quitte à translater pour se ramener en 0, ceci signifie qu'il existe une suite $(u_n)_n$ de vecteurs non nuls que $u_n \to 0$.

$\mathring{P} \neq \varnothing$ donc il existe $x \in P$ et $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \mathring{P}$. Or, pour n assez grand, $\|u_n\| < \frac{r}{2}$ donc $\tau_{u_n}\mathring{P} \cap \mathring{P} \neq \varnothing$ donc $\tau_{u_n} = \mathrm{Id}$ et $u_n = 0$. Absurde. ∎

Par ce résultat on a donc trois possibilités :

- $T = \{0\}$
- $T = \mathbb{Z}u$ avec $u \neq 0$
- $T = \mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v$ avec u, v non colinéaires

Proposition 2 Seul le dernier cas peut survenir.

Démonstration.

- Supposons $T = \{0\}$. Soient $r, s \in G$ deux rotations. Alors, comme $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif, la partie linéaire de $rsr^{-1}s^{-1}$ est Id, c'est donc une translation donc $rs = sr$.
  Ainsi, toutes les rotations de G commutent, elles ont donc même centre, noté Ω.
  P est compact donc il existe $R > 0$ tel que $P \subset B(\Omega, R)$. Alors, pour tout $g \in G$, $gP \subset B(\Omega, R)$, ce qui contredit le fait que G est un groupe de pavage.
- Supposons $T = \mathbb{Z}u$ et soit $r \in G$ une rotation. On remarque alors subtilement que

$$r\tau_u r^{-1} = \tau_{r(u)}$$

  donc que $r(u) \in T$. Si r est une rotation non triviale, on doit avoir $r(u) = -u$ donc r est une symétrie centrale.
  De plus, soient r, s deux rotations de G non triviales. rs est alors une translation de vecteur $2(\Omega_r - \Omega_s)$. Autrement dit, tous les centres des rotations non triviales de G sont alignés (sur une droite D de direction u).
  Soit C un cylindre d'axe D et de rayon suffisamment grand pour contenir P. Alors pour tout $g \in G$, $gP \subset C$, ce qui contredit aussi le premier point de la définition de groupe de pavage. ∎

On arrive enfin au théorème principal :

Théorème *Si G est un groupe de pavage, alors G est (à composition par une application affine près) d'une des formes suivantes :*

- $\langle \tau_{(1,0)}, \tau_{(0,1)} \rangle$
- $\langle \tau_{(1,0)}, \tau_{(0,1)}, r_\pi \rangle$
- $\langle \tau_{(1,0)}, \tau_{(0,1)}, r_{\frac{\pi}{2}} \rangle$
- $\langle \tau_{(1,0)}, \tau_{(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})}, r_{\frac{\pi}{3}} \rangle$
- $\langle \tau_{(1,0)}, \tau_{(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})}, r_{\frac{2\pi}{3}} \rangle$

Démonstration. Soit r une rotation de G. Alors $r\tau_u r^{-1} = \tau_{r(u)}$ donc $r(u) \in \mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v$. De même $r(v) \in \mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v$.

Donc la matrice de la partie linéaire de r est à coefficients entiers (!). En regardant la trace, on a $2\cos(\theta_r) \in \mathbb{Z}$.

Ceci impose que $\theta_r \in \pm\{0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\}$. Ainsi, le groupe G' des parties linéaires des éléments de G est parmi $\{\mathrm{Id}\}$, $\langle r_\pi \rangle$, $\langle r_{\frac{\pi}{2}} \rangle$, $\langle r_{\frac{\pi}{3}} \rangle$ ou $\langle r_{\frac{2\pi}{3}} \rangle$. En effet, si G' contient une rotation d'ordre 3 ou 6, et une d'ordre 4, en composant bien comme il faut, on trouve une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$, ce qui est impossible.

Si $G' = \{\mathrm{Id}\}$ alors G ne contient que des translations. Composer par une application affine ne va rien changer (conjuguer l'identité par une application affine ne change rien). Quitte à envoyer u sur 1 et v sur i, on a $G = \langle \tau_{(1,0)}, \tau_{(0,1)} \rangle$.

Si $G' = \{\mathrm{Id}, r_\pi\}$, on peut aussi envoyer (on conjougue $-\mathrm{Id}$ cette fois) u sur 1 et v sur i et on obtient $G = \langle \tau_{(1,0)}, \tau_{(0,1)}, r_\pi \rangle$.

Si $G' = \langle r_\theta \rangle$, il faut montrer qu'il existe x tel que $(x, r(x))$ soit une base de T. Prenons un vecteur x non nul de norme minimale parmi les éléments de T. $(x, r(x))$ est un famille libre, il faut maintenant montrer que tout élément de T est combinaison linéaire entière de $(x, r(x))$.

Soit $u \in T$ et supposons que $u \notin \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}r(x) =: T'$. Notons v le point de T' le plus proche de u.

- Dans le cas $\theta = \frac{\pi}{2}$, quitte à tourner la tête, on sait que T' contient le réseau $\|x\|\,\mathbb{Z}^2$. $v - u \in T$ et $\|v - u\| \leqslant \frac{\|x\|}{\sqrt{2}}$. En effet, v est dans un carré de côté $\|x\|$ donc la plus petite distance à un sommet du carré est au plus $\frac{\|x\|}{\sqrt{2}}$. On a donc trouvé un point de T qui contredit la minimalité de $\|x\|$.
- Dans le cas $\theta = \frac{\pi}{3}$, le même argument avec des triangles à la place des carrés nous permet de conclure qu'il existe x tel que $(x, r(x))$ engendre T.
- Dans le cas $\theta = \frac{2\pi}{3}$, on veut appliquer le même argument avec des hexagones. Soit u, v comme précédemment. Alors on a toujours

$$\|v - u\| \leqslant \|x\|$$

avec inégalité stricte saut si v est le centre d'un des hexagones. On a alors (à translation d'un élément de $T' \subset T$ près) $v = x + r(x)$ donc $v \in T$, ce qui conclut aussi à une absurdité.

Finalement, en changeant de base $(u, v) \to (x, r(x))$, on garde une base de T. En conjugant par une application affine, on peut alors envoyer x sur $(1, 0)$ (et donc $r(x)$ sur $r(1, 0)$). On obtient alors dans chacun des trois cas, le groupe engendré par $\langle \tau_x, \tau_{r_\theta(x)}, r_\theta \rangle$.

■

Bon, faudrait faire des dessins mais j'ai la flemme :

- P est le carré $[0, 1] \times [0, i]$
- P est le rectangle $[0, \frac{1}{2}] \times [0, i]$
- P est le carré $[0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{i}{2}]$
- P est un triangle isocèle de sommets 0, 1, $\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{6}$
- P est un losange de sommets 0, 1, $\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{6}$