Développement : Point fixe et théorème d'inversion locale

Pierron Théo-Lacoste Cyril

28 décembre 2013

Référence : Rouvière, p.222

<u>Théorème</u> *Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 sur un voisinage U de 0 dans $\mathbb{R}^n$ telle que $f(0) = 0$ et $Df(0)$ inversible. Alors il existe des voisinages ouverts U et V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tels que f soit un C^1-difféomorphisme de V sur W.*

On note $A = Df(0)$ et pour $x \in U$, $y \in \mathbb{R}^n$:

$$F_y(x) = x + A^{-1}(y - f(x))$$

Remarque 0.1 On a $f(x) = y \leftrightarrow F_y(x) = x$, on a donc transformé notre équation en équation de point fixe. De plus, $DF_y(x) = I - A^{-1} \circ Df(x)$, donc $DF_y(0) = 0$ et $\|DF_y(x)\|$ est petite au voisinage de 0, donc les itérés $x_{n+1} = F_y(x_n)$ convergent vite vers la solution. On peut avoir une idée de la construction géométrique en dimension 1 à partir du graphe de f en observant que $x_{n+1} - x_n = A^{-1}(y - f(x_n))$ donc $y - f(x_n) = A(x_{n+1} - x_n)$ où $A = f'(0)$ en dimension 1, donc $(x_n, f(x_n))$ et (x_{n+1}, y_n) sont sur une même droite de coefficient directeur $f'(0)$, autrement dit pour construire x_{n+1} on trace la parallèle à la tangente au graphe de f en 0 passant par $(x_n, f(x_n))$, et x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de cette droite avec la droite horizontale d'ordonnée y.

Démonstration. On fixe $\varepsilon \in]0, 1[$. Pour $y \in \mathbb{R}^n$, comme $DF_y(0) = 0$ et par continuité de DF_y (qui provient du caractère C^1 de f) il existe $r > 0$ tel que si $\|x\| \leqslant r$, $\|DF_y(x)\| \leqslant \varepsilon$. On choisit r assez petit pour que $\overline{B_r} \subset U$ où B_r désigne la boule ouverte de centre 0 et de rayon r. Comme DF_y ne dépend pas de y, r non plus.

On pose $W = \{y \in \mathbb{R}^n, \|A^{-1}y\| < (1 - \varepsilon)r\}$, voisinage ouvert de 0. Pour $y \in W$, $F_y(\overline{B_r}) \subset B_r$, en effet si $\|x\| \leqslant r$:

$$\begin{aligned}
\|F_y(x)\| &\leqslant \|F_y(0)\| + \|F_y(x) - F_y(0)\| \\
&\leqslant \|A^{-1}y\| + \varepsilon r \text{ par accroissements finis} \\
&< (1 - \varepsilon)r + \varepsilon r = r
\end{aligned}$$

Alors, comme $\|DF_y(x)\| \leqslant \varepsilon < 1$ pour $x \in \overline{B_r}$, F_y est ε-contractante de $\overline{B_r}$ sur elle-même si $y \in W$, et $\overline{B_r}$ étant complète, par théorème de point fixe, F_y admet un unique point fixe $x \in \overline{B_r}$, limite de la suite récurrente $x_{n+1} = F_y(x_n)$ avec par exemple $x_0 = 0$. On a même $x \in B_r$ car $F_y(x) = x$ et $F_y(\overline{B_r}) \subset B_r$. En posant $V = B_r \cap f^{-1}(W)$, V est un voisinage ouvert de 0 et f induit une bijection de V et W. Il reste à montrer que f^{-1} est C^1 sur W.

Remarquons tout d'abord que si $x \in V$, $Df(x)$ est inversible, en effet comme $\|DF_y(x)\| \leqslant \varepsilon < 1$ la série de Neumann $\sum_{k=0}^{\infty}(DF_y(x))^k$ converge et est l'inverse de $I - DF_y(x) = A^{-1} \circ Df(x)$ donc $A^{-1} \circ Df(x)$ est inversible donc $Df(x)$ aussi.

Montrons maintenant que f^{-1} est continue, elle est en fait lipschitzienne car si $y, y_0 \in W$, et $x, x_0 \in V$ sont tels que $f(x) = y$ et $f(x_0) = y_0$:

$$\begin{aligned}
x - x_0 &= F_y(x) - F_{y_0}(x_0) \\
&= (F_y(x) - F_y(x_0)) + (F_y(x_0) - F_{y_0}(x_0)) \\
&= (F_y(x) - F_y(x_0)) + A^{-1}(y - y_0) \\
\|x - x_0\| &\leqslant \varepsilon\|x - x_0\| + \|A^{-1}\|.\|y - y_0\|
\end{aligned}$$

donc $\|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\| \leqslant C\|y - y_0\|$, où $C = \frac{\|A^{-1}\|}{1-\varepsilon}$.

De plus, comme f est différentiable en x_0 on peut écrire :

$$y - y_0 = f(x) - f(x_0) = Df(x_0)(x - x_0) + R$$

où $R = o(\|x - x_0\|)$, ie si $\eta > 0$ est fixé, il existe $\alpha > 0$ tel que si $\|x - x_0\| \leqslant \alpha$, alors $\|R\| \leqslant \eta\|x - x_0\|$, donc comme $\|x - x_0\| \leqslant C\|y - y_0\|$, on a aussi :

$$\|y - y_0\| \leqslant \frac{\alpha}{C} \to \|R\| \leqslant \eta\|x - x_0\| \leqslant \eta C\|y - y_0\|$$

donc $R = o(\|y - y_0\|)$, d'où :

$$Df(x_0)(x - x_0) = y - y_0 + o(\|y - y_0\|)$$

or $Df(x_0)$ est inversible donc :

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) = x - x_0 = Df(x_0)^{-1}(y - y_0) + o(\|y - y_0\|)$$

donc f^{-1} est différentiable en y_0 et $Df^{-1}(y_0) = Df(x_0)^{-1} = Df(f^{-1}(y_0))^{-1}$.

Enfin, comme f^{-1}, Df et l'inverse sont continues, Df^{-1} est continue par composée donc f^{-1} est C^1 sur W.

$\square$