Calcul différentiel et fonctions holomorphes

Pierron Théo

ENS Ker Lann

Table des matières

Première partie

Calcul différentiel

Chapitre 1

Fonctions différentielles

Rappels

<u>Définition 1.1</u> Soit $f : I \to F$ avec I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et F un espace vectoriel normé.

Soit $a \in I$.

f est dite continue en a ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leqslant \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leqslant \varepsilon$$

f est dite dérivable en a ssi $\lim\limits_{t \to a} \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ existe. Elle se note $f'(a)$.

<u>Définition 1.2</u> Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ avec U un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

f est dite continue en a ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \|x - a\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_{\mathbb{R}^p} \leqslant \varepsilon$$

Remarque 1.1 Comme on n'a pas de division dans $\mathbb{R}^p$, on ne peut pas parler de dérivabilité.

Exemple 1.1

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^8} \end{cases}$$

avec $f(0, 0) = 0$.

On a avec $x \to 0$:

$$f(x, 0) = \frac{x}{1 + x^4} \to 0$$
$$f(0, y) = 0 \to 0$$
$$f(x, ax) = \frac{x^5}{a^2(x - x^2)^2 + x^8} \sim \frac{x^3}{a^2} \to 0$$

f est continue dans toutes les directions, mais $f(x, x^2) = \frac{1}{x^3}$ n'est pas continue en 0.

f est même dérivable dans toutes les directions mais pas continue.

1.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 1.3 Soient E et F deux espaces vectoriels normés, U un ouvert de E, $a \in U$ et $f : U \to F$.

f est dite différentiable en a ssi il existe $L \in \mathscr{L}_c(E, F)$ tel que $\forall h \in F$ tel que $a + h \in U$, $f(a + h) = f(a) + L(h) + \|h\|_E\, \varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Remarque 1.2

- *(Définition équivalente)*
  f est dite différentiable en a ssi f est continue en a et il existe $L \in \mathscr{L}(E, F)$ tel que $\forall h \in F$ tel que $a + h \in U$, $f(a + h) = f(a) + L(h) + \|h\|_E\, \varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.
- *Les définitions dépendent des normes sur E et F, mais on s'en fiche en dimension finie.*

Proposition 1.1 (Rappel) Soit $f : (E, \|\cdot\|_E) \to (E', \|\cdot\|_{E'})$ linéaire.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est continue
- f est continue en 0
- f est bornée sur les bornés
- f est lipschitzienne en 0
- f est lipschitzienne

Remarque 1.3 *En particulier, si E est de dimension finie, $\mathscr{L}(E, F) = \mathscr{L}_c(E, F)$.*

Proposition 1.2 Si f est différentiable en a, alors L est unique. On l'appelle différentielle de f en a ou application linéaire tangente et on la note $Df(a)$ ou $f'(a)$ ou $df(a)$ ou $d_a f$ ou $\overrightarrow{D_a f}$, ...

Démonstration. On suppose qu'il existe L_1 et L_2 qui marchent.

On a $f(a) + L_1(h) + \|h\|_E\, \varepsilon_1(h) = f(a + h) = f(a) + L_2(h) + \|h\|_E\, \varepsilon_2(h)$ avec $\varepsilon_1(h)$ et $\varepsilon_2(h) \to 0$ quand $h \to 0$.

Il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$.

Donc, pour tout h tel que $\|h\|_E \leqslant r$, $L_1(h) - L_2(h) = \|h\|_E\, \varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Soit $\lambda \in]0, 1]$. $a + \lambda h \in U$ donc $L_1(\lambda h) - L_2(\lambda h) = \|\lambda h\|_E\, \varepsilon(\lambda h)$

Donc $L_1(h) - L_2(h) = \|h\|_E\, \varepsilon(\lambda h)$. Avec $\lambda \to 0$, on a $L_1(h) = L_2(h)$ sur $B(a, r)$ donc sur E. ∎

Remarque 1.4 *Dans le cas $E = \mathbb{R}$ et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.*

Si f est dérivable en a, f est différentiable en a avec $Df(a) = (h \mapsto hf'(a))$.

Si f est différentiable en a alors f est dérivable en a puisque :

$$\varphi : \begin{cases} F & \to & \mathscr{L}_c(\mathbb{R}, F) \\ f & \mapsto & m_f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & F \\ \lambda & \mapsto & \lambda f \end{cases} \end{cases}$$

est un isomorphisme donc $Df(a) \in \mathscr{L}_c(\mathbb{R}, F)$ est une homothétie de rapport $\lambda(a) = f'(a)$.

Exemple 1.2

- $$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^2 y \end{cases}$$

  $$\begin{aligned} f(x+h, y+k) &= (x+h)^2(y+k) \\ &= \underbrace{x^2y}_{f(x,y)} + \underbrace{x^2k + 2hxy}_{Df(x,y)(h,k)} + \underbrace{2xhk + h^2y + h^2k}_{\|(h,k)\|\varepsilon(h,k)} \end{aligned}$$

  Il faut montrer que $\varepsilon(h, k) = \frac{2xhk+h^2y+h^2k}{\|(h,k)\|} \to 0$ quand $(h, k) \to 0$.
  C'est bien le cas, avec la norme euclidienne :

  $$\left|\frac{2xhk}{\|(h,k)\|_2}\right| \leqslant |x|\sqrt{h^2+k^2} \to 0$$
  $$\left|\frac{h^2y}{\|(h,k)\|_2}\right| \leqslant |y|\sqrt{h^2+k^2} \to 0$$
  $$\left|\frac{h^2k}{\|(h,k)\|_2}\right| \leqslant |k|\sqrt{h^2+k^2} \to 0$$

- On montre de même que :

  $$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, -1), x \in \mathbb{R}\} & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \frac{x}{y+1} \end{cases}$$

  est différentiable.
- On munit $C^0([0, 1])$ de la norme infinie et on pose :

  $$I_p : \begin{cases} C^0([0, 1]) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_0^1 f^p(x)\,\mathrm{d}x \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
I_p(f+h) &= \int_0^1 (f(x)+h(x))^p \,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{p} \int_0^1 \binom{p}{k} f^k(x) h^{p-k}(x) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 f^p(x)\,\mathrm{d}x + \underbrace{p\int_0^1 f^{p-1}(x)h(x)\,\mathrm{d}x}_{DI_p(f)(h)} + \sum_{k=0}^{p-2}\int_0^1 \binom{p}{k} f^k(x)h^{p-k}(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

On a $|DI_p(f)(h)| \leqslant p\,\|f\|^{p-1}\,\|h\|$ donc $DI_p(f)$ est lipschitzienne donc continue.
On a aussi :

$$\frac{\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{p-2}\int_0^1 \binom{p}{k} f^k(x)h^{p-k}(x)\,\mathrm{d}x\right|}{\|h\|} \leqslant \sum_{k=0}^{p-2}\binom{p}{k}\,\|f\|^k\,\|h\|^{p-k} \to 0$$

Donc I_p est différentiable et sa différentielle est $DI_p(f)$.

- Toute application linéaire continue est différentiable de différentielle elle-même.
- Toute application affine $S = b + T$ continue est différentiable de différentielle T.
- La différentielle d'une application constante est nulle. La réciproque n'est pas facile.

Définition 1.4 Soient E et F deux espaces vectoriels normés, U un ouvert de E, $f : U \to F$ et $V \subset U$.

On dit que f est différentiable sur V ssi f est différentiable en tous les points de V.

On définit alors

$$Df : \begin{cases} V & \to & \mathscr{L}_c(E,F) \\ a & \mapsto & Df(a) \end{cases}$$

Si Df est continue sur V, on dit que f est de classe C^1 sur V.

1.2 Applications n-linéaires

Définition 1.5 Soient $E_1, \cdots, E_n$ et F des espaces vectoriels normés.

$f : \prod_{i=1}^{n} E_i \to F$ est dite n-linéaire ssi elle est linéaire par rapport à chaque variable.

Proposition 1.3 Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i). f est continue

(ii). f est continue en 0

(iii). f est bornée au voisinage de 0

(iv). $\exists M > 0, \forall (a_1, \cdots, a_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i, \|f(a_1, \cdots, a_n)\|_F \leqslant M \prod_{i=1}^{n} \|a_i\|_{E_i}$

Démonstration.

$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ Clair

$(iii) \Rightarrow (iv)$ On munit $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ de la norme $\|x\|_E = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|x_i\|_{E_i}$.

D'après 3, il existe $r > 0$ et $K > 0$ tel que $\forall x \in E$, $\|x\|_E \leqslant r \Rightarrow \|f(x)\|_F \leqslant K$.

Soit $a \in E$ tel que pour tout i, $a_i \neq 0$.

On a $\left\| r(\frac{a_1}{\|a_1\|_{E_1}}, \cdots, \frac{a_n}{\|a_n\|_{E_n}}) \right\| = r$ donc $\left\| f(r(\frac{a_1}{\|a_1\|_{E_1}}, \cdots, \frac{a_n}{\|a_n\|_{E_n}})) \right\|_F \leqslant K$.

Donc $\|f(a)\|_F \leqslant \frac{K}{r^n} \prod_{i=1}^{n} \|a_i\|_{E_i}$.

$(iv) \Rightarrow (i)$ On se place dans le cas $n = 2$. Les autres cas se traitent de la même manière.

On a $f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) = f(a_1, a_2) + f(a_1, h_2) + f(h_1, a_2) + f(h_1, h_2)$.

Par 4, $\|f(a_1, h_2)\|_F \leqslant M \|a_1\|_{E_1} \|h_2\|_{E_2} \to 0$ donc les trois derniers termes tendent vers 0 quand $(h_1, h_2) \to 0$ donc f est continue. ■

Proposition 1.4 Soit $f : E = \prod_{i=1}^{n} E_i \to F$ n-linéaire continue.

f est différentiable sur E et

$$Df(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} f(a_1, \cdots, a_{i-1}, h_i, a_{i+1}, \cdots, a_n)$$

Démonstration dans le cas $n = 3$.

$$\begin{aligned} f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, a_3 + h_3) = &f(a_1, a_2, a_3) \\ &+ f(h_1, a_2, a_3) + f(a_1, h_2, a_3) + f(a_1, a_2, h_3) \\ &+ f(h_1, h_2, a_3) + f(h_1, a_2, h_3) + f(a_1, h_2, h_3) \\ &+ f(h_1, h_2, h_3) \end{aligned}$$

$Df(a)(h) = f(h_1, a_2, a_3) + f(a_1, h_2, a_3) + f(a_1, a_2, h_3)$ est bien linéaire et :

$$\begin{aligned} &\|Df(a)(h)\|_F \leqslant \|f(a_1, a_2, h_3)\|_F + \|f(a_1, h_2, a_3)\|_F + \|f(h_1, a_2, a_3)\|_F \\ &\leqslant M(\|a_1\|_{E_1} \|a_2\|_{E_2} \|h_1\|_{E_3} + \|a_1\|_{E_1} \|h_2\|_{E_2} \|a_1\|_{E_3} + \|h_1\|_{E_1} \|a_2\|_{E_2} \|a_1\|_{E_3}) \\ &\leqslant M \|a\|_E^2 \|h\|_E \end{aligned}$$

donc $Df(a) \in \mathscr{L}_c(E, F)$.

De plus, $\frac{\|f(h_1,h_2,a_3)\|_F}{\|h\|_E} \leqslant M \|h\|_E \|a\|_E \to 0$ et on a la même chose pour les deux autres termes.

De même, $\frac{\|f(h_1,h_2,h_3)\|_F}{\|h\|_E} \leqslant M \|h\|_E^2 \to 0$.

Donc on a le résultat. ■

Exemple 1.3 Différentielle du déterminant det : $(\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ est n-linéaire continue (car on est en dimension finie)

Donc

$$D\det(C_1|\cdots|C_n)(H_1|\cdots|H_n) = \sum_{i=1}^{n} \det(C_1|\cdots|C_{i-1}|H_i|C_{i+1}|\cdots|C_n)$$

On peut remarquer que $D\det(I_n)(H) = \mathrm{tr}(H)$ et que, si $M \in GL_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\det(M+H) &= \det(M)\det(I_n + M^{-1}H)\\ &= \det(M) + \det(M)\,\mathrm{tr}(M^{-1}H) + \|H\|\,\varepsilon(H)\end{aligned}$$

Donc $D\det(M)(H) = \mathrm{tr}(\widetilde{M}^t H)$ si M est inversible.

Or le déterminant est C^1 (polynômial) donc $D\det(M)$ est continue et, comme $M \mapsto (H \mapsto \mathrm{tr}(\widetilde{M}^t H))$ est polynômiale donc continue, cette formule est valable sur tout compact de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ donc partout.

Corollaire 1.1 *Soit E, F deux espaces vectoriels normés, $n \in \mathbb{N}$ et $f : E^n \to F$ n-linéaire continue.*

On pose $F : x \mapsto f(x, \cdots, x)$. F est différentiable et C^1 sur E et on a $DF(x)(h) = \sum_{i=1}^{n} f(\underbrace{x, \cdots, x}_{i-1 \text{ fois}}, h, x, \cdots, x)$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}F(x+h) - F(x) &= f(x+h, \cdots, x+h) - f(x, \cdots, x)\\ &= Df(x, \cdots, x)(h, \cdots, h) + \|(h, \cdots, h)\|_{E^n}\,\varepsilon(h, \cdots, h)\\ &= \sum_{i=1}^{n} f(\underbrace{x, \cdots, x}_{i-1 \text{ fois}}, h, x, \cdots, x) + \|h\|_E\,\varepsilon(h)\end{aligned}$$

Remarque 1.5 Si on suppose que f est symétrique,

$$DF(x)(h) = nf(h, x, \cdots, x)$$

Exemple 1.4

- Si H est un Hilbert, de produit scalaire f, f est bilinéaire continue (par Cauchy-Schwartz) et symétrique donc $F = \|\cdot\|^2$ est C^1 et $DF(u)(v) = 2\langle u, v\rangle$.
- Si $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on note f la multiplication matricielle. f est bilinéaire continue (car lipschitzienne pour les normes d'algèbre) et on a $Df(M,N)(H,K) = MK + NH$. $F = M \mapsto M^2$ est donc C^1 et $DF(M)(H) = MH + HM$.

1.3 Différentielle de fonctions composées

Soient E, F et G des espaces vectoriels normés, U un ouvert de E, V un ouvert de F.

Soit $f : U \to F$ et $g : V \to G$.

<u>THÉORÈME 1.1</u> *Soit $a \in U$ tel que $f(a) \in V$.*

Si f est différentiable en a et g différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et :

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$$

Démonstration. Soit $a \in U$ tel que $f(a) \in V$. Comme f est continue en a, pour h suffisament petit, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
&(g \circ f)(a+h) = g(f(a) + Df(a)(h) + \|h\|_E \varepsilon_f(h)) \\
&= g(f(a) + k) \text{ avec } k = Df(a)(h) + \|h\|_E \varepsilon_f(h) \\
&= g(f(a)) + Dg(f(a))(k_f) + \|k\|_F \varepsilon_g(k) \\
&= g(f(a)) + Dg(f(a))(Df(a)(h)) + Dg(f(a))(\|h\|_E \varepsilon_f(h)) + \|k\|_F \varepsilon_g(k) \\
&= g(f(a)) + Dg(f(a))(Df(a)(h)) + \|h\|_E \left(Dg(f(a))(\varepsilon_f(h)) + \frac{\|k\|_F}{\|h\|_E} \varepsilon_g(k) \right)
\end{aligned}$$

Et on a $\lim\limits_{h \to 0} Dg(f(a))(\varepsilon_f(h)) = 0$ car $Dg(f(a))$ est continue.

De plus, $\|k\|_F \leqslant \|Df(a)\| \, \|h\|_E + \|h\|_E \, \|\varepsilon_f(h)\|_F$.

Donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\|k\|_F}{\|h\|_E} \varepsilon_g(k) = 0$.

D'où le résultat. ∎

COROLLAIRE 1.2 *Si f est différentiable (resp. C^1) sur U, $f(U) \subset V$ et g différentiable (resp. C^1) sur V, alors $g \circ f$ est différentiable (resp. C^1) sur U.*

COROLLAIRE 1.3 *Soit E, F deux espaces vectoriels normés, $f : U \to F$ avec U un ouvert de E.*

Soit $\gamma : I \to E$ avec I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Soit $t_0 \in I$ tel que $\gamma(t_0) \in U$.

Si γ est dérivable en t_0 et f est différentiable en $\gamma(t_0)$, alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t_0 et :

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = Df(\gamma(t_0))(\gamma'(t_0))$$

Remarque 1.6

- *Si $\gamma = t \mapsto a + th$, on a $(f(a+th))'|_{t=0} = Df(a)(h)$.*
- *Il est possible que $f(a+th)$ soit dérivable en $t = 0$ pour tout h mais que f ne soit pas différentiable en a*

Exemple 1.5

$$f : \begin{cases} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M^2 \end{cases}$$

On a $Df(M)(H) = MH + HM$ et $(f(M+tH))'(0) = (MH + HM + 2tH^2)(0) = MH + HM$.

1.4 Différentielles partielles et fonctions à valeurs dans un produit

1.4.1 Différentielles partielles

Soient $E_1, \cdots, E_n, F$ des espaces vectoriels normés, $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$, $f : U \to F$ avec U un ouvert de E et $a \in U$ tel que f soit différentiable en a.

Définition 1.6 Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on pose :

$$\lambda_a^j : \begin{cases} E_j & \to & E \\ b & \mapsto & f(a_1, \cdots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \cdots, a_n) \end{cases}$$

λ_a^j est affine continue donc $f \circ \lambda_a^j$ est différentiable en a_j et

$$D(f \circ \lambda_a^j)(a_j)(h_j) = Df(a)(0, \cdots, 0, h_j, 0, \cdots, 0)$$

On note alors ceci $D_j f(a)(h_j)$ ou $\partial_j f(a)(h_j)$ et on parle de différentielle partielle de f en a par rapport à a_j.

<u>Théorème 1.2</u> *Si f est différentiable, les différentielles partielles existent et*

$$Df(a)(h) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(a)(h_j)$$

Remarque 1.7

- *La réciproque est fausse.*
- *Dans le cas $E = \mathbb{R}^n$, $\partial_j f(a)$ est identifié à un élément de F et on a $\partial_j f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.*

1.4.2 Fonctions définies sur un produit

Soit $E, F_1, \cdots, F_n$ des espaces vectoriels normés, $f : U \to \prod_{i=1}^{n} F_i$ avec U un ouvert de E.

On définit $f_1, \cdots, f_n$ par $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x))^t$.

Proposition 1.5 f est différentiable (resp. C^1) en a ssi $f_1, \cdots, f_n$ le sont. On a alors :

$$Df(a)(h) = \begin{pmatrix} Df_1(a)(h) \\ \vdots \\ Df_n(a)(h) \end{pmatrix}$$

Démonstration.

$\Rightarrow$ Clair par composition avec les projections.

$\Leftarrow$ On a :

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= (f_1(a+h) - f_1(a), \cdots, f_n(a+h) - f_n(a)) \\ &= (Df_1(a)(h), \cdots, Df_n(a)(h)) + \|h\|_E (\varepsilon_1(h), \cdots, \varepsilon_n(h)) \end{aligned}$$

$(Df_1(a)(h), \cdots, Df_n(a)(h))$ est bien linéaire continue en h car lispschitzienne : $\|Df(x)(h)\|_F \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|Df_i(x)\|_{F_i} \|h\|_E$.

De plus, $\lim_{h\to 0}(\varepsilon_1(h), \cdots, \varepsilon_n(h)) = 0$. ∎

Remarque 1.8

- *Dans le cas $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$, on prend $f : U \to \mathbb{R}^p$ avec U un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*
  On définit $f_1, \cdots, f_p$ comme précédemment.

On a vu que f est différentiable en a ssi $f_1, \cdots, f_p$ le sont. De plus,

$$Df(a)(h) = \begin{pmatrix} Df_1(a)(h) \\ \vdots \\ Df_p(a)(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a)(h_j) \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_p}{\partial x_j}(a)(h_j) \end{pmatrix} = J_f^a h$$

avec $J_f^a = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{i,j}$ la matrice jacobienne de f en a.
La différentielle d'une composée se réécrit alors :

$$J_{g\circ f}^a = J_g^{f(a)} J_f^a$$

- *Si $p = 1$, J_f^a est un vecteur ligne et*

$$Df(a)(h) = \langle (J_f^a)^t, h\rangle = \langle \overrightarrow{\text{grad}}\, f(a), h\rangle$$

- *Dans le cas d'un Hilbert H et U un ouvert de H, si f est différentiable en a, $Df(a) \in H'$ (dual topologique) et il existe $g(a) \in H$ tel que $Df(a)(h) = \langle g(a), h\rangle$.*

Exemple 1.6

- $\varphi : F_1 \times F_2 \to G$ bilinéaire continue, $f_1 : U \to F_1$, $f_2 : U \to f_2$.

$$F : \begin{cases} U & \to & G \\ x & \mapsto & \varphi(f_1(x), f_2(x)) \end{cases}$$

  Si f_1 et f_2 sont différentiables en a, F est différentiable et :

$$\begin{aligned} DF(a)(h) &= D_\varphi(f_1(a), f_2(a))(Df_1(a)(h), Df_2(a)(h)) \\ &= \varphi(Df_1(a)(h), f_2(a)) + \varphi(f_1(a), Df_2(a)(h)) \end{aligned}$$

- On pose, pour un Banach E,

$$\varphi : \begin{cases} \mathscr{L}_c(E) \times \mathscr{L}_c(E) & \to & \mathscr{L}_c(E) \\ (u, v) & \mapsto & u \circ v \end{cases}$$

  est bilinéaire continue (pour une norme d'algèbre).
  On pose $I(E) = \{u \in \mathscr{L}_c(E), \exists v \in \mathscr{L}_c(E), u \circ v = v \circ u = \text{Id}\} = \{u \in \mathscr{L}_c(E), \exists v \in \mathscr{L}(E), u \circ v = v \circ u = \text{Id}\}$ et :

$$f_1 : \begin{cases} I(E) & \to & \mathscr{L}_c(E) \\ u & \mapsto & u^{-1} \end{cases} \qquad f_2 : \begin{cases} I(E) & \to & \mathscr{L}_c(E) \\ u & \mapsto & u \end{cases}$$

$I(E)$ est bien un ouvert : on montre qu'il existe $r > 0$ tel que $B(\mathrm{Id}, r) \subset I(E)$: $(\mathrm{Id} - h)$ est inversible d'inverse $\sum\limits_{n \geqslant 0} h^n$ qui converge pour $\|h\| < 1$.
De même, si $\|h\| < \frac{1}{\|u^{-1}\|}$, $u + h$ est inversible donc $I(E)$ est un ouvert (mais la complétude de E est nécessaire).
$F = \varphi(f_1, f_2)$ est donc la fonction constante égale à Id_E et $DF(u)(h) = 0$.
Or $DF(u)(h) = u^{-1} \circ h + Df_1(u)(h) \circ u$ donc $Df_1(u)(h) = -u^{-1} \circ h \circ u$.

- Autre démonstration de ce résultat :

$$\begin{aligned}
(u+h)^{-1} - u^{-1} &= u^{-1}(I + hu^{-1})^{-1} - u^{-1} \\
&= u^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (hu^{-1})^n - u^{-1} \\
&= -u^{-1}hu^{-1} + \|h\|\,\varepsilon(h)
\end{aligned}$$

- Une troisième :

$$\begin{aligned}
(u+h)^{-1} - u^{-1} &= (u+h)^{-1}(u - (u+h))u^{-1} \\
&= -(u+h)^{-1}hu^{-1} \\
&= -u^{-1}hu^{-1} - ((u+h)^{-1}hu^{-1} - u^{-1}hu^{-1})
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\left\|(u+h)^{-1}hu^{-1} - u^{-1}hu^{-1}\right\| &= \left\|((u+h)^{-1} - u^{-1})hu^{-1}\right\| \\
&\leqslant \left\|(u+h)^{-1} - u^{-1}\right\| \|h\| \left\|u^{-1}\right\|
\end{aligned}$$

Donc ça marche.

Chapitre 2

Théorème des accroissements finis

<u>Théorème 2.1</u> *Soient E, F deux espaces vectoriels normés, U un ouvert de E et $f : U \to F$ différentiable sur U.*

Soient $a, b \in U$ tel que $[a, b] \subset U$.

$$\|f(b) - f(a)\|_F \leqslant \|b - a\|_E \sup_{y \in [a,b]} \|Df(y)\|_{\mathscr{L}_c(E,F)}$$

Remarque 2.1 *Le sup n'est pas forcément fini. Dans le cas C^1, il l'est.*

2.1 Le cas de la variable réelle

<u>Théorème 2.2</u> *Soient $a < b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to E$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues, dérivables à droite sur $[a, b]$ et telle que pour tout $t \in [a, b]$, $|f'_d(t)| \leqslant g'_d(t)$.*

Alors $\|f(b) - f(a)\|_E \leqslant g(b) - g(a)$.

Démonstration.

- Cas général :
  Soit $\eta > 0$. On pose $A_\eta = \{t \in [a, b], \|f(t) - f(a)\|_E \leqslant g(t) - g(a) + \eta(t - a) + \eta\}$.
  On veut montrer que $b \in A_\eta$ pour tout $\eta > 0$. On aura alors $b \in \bigcap_{\eta > 0} A_\eta = A_0$.
  A_η est clairement fermé borné donc A_η contient $t_0 = \sup A_\eta$. Montrons que $b = t_0$.
  Supposons $t_0 < b$.
  On a $\|f(t_0) - f(a)\|_E \leqslant g(t_0) - g(a) + \eta(t_0 - a) + \eta$.

Soit $\delta > 0$ tel que $t_0 + \delta \leqslant b$. On a $f(t_0 + \delta) = f(t_0) + \delta f'_d(t_0) + \delta\varepsilon_1(\delta)$ et de même avec g.

$$\begin{aligned}
&\|f(t_0+\delta) - f(a)\|_E \leqslant \|f(t_0+\delta) - f(t_0)\|_E + \|f(t_0) - f(a)\|_E \\
&\leqslant \delta \|f'_d(t_0)\|_E + \delta|\varepsilon_1(\delta)| + g(t_0) - g(a) + \eta(t_0 - a) + \eta \\
&\leqslant \delta g'_d(t_0) + g(t_0) - g(a) + \delta|\varepsilon_1(\delta)| + \eta(t_0 - a) + \eta \\
&\leqslant g(t_0+\delta) - g(a) + \delta|\varepsilon_1(\delta)| + \delta|\varepsilon_2(\delta)| + \eta(t_0 + \delta - a) + \eta \\
&\leqslant g(t_0+\delta) - g(a) + \eta(t_0+\delta) + \eta + \delta(|\varepsilon_1(\delta)| + |\varepsilon_2(\delta)| - \eta)
\end{aligned}$$

Il existe $\delta > 0$ tel que $|\varepsilon_1(\delta)| + |\varepsilon_2(\delta)| - \eta < 0$. On a alors :

$$\|f(t_0+\delta) - f(a)\|_E \leqslant g(t_0+\delta) - g(a) + \eta(t_0+\delta) + \eta$$

Donc $t_0 + \delta \in A_\eta$ ce qui est une contradiction donc $b = t_0 \in A_\eta$.

- Dans le cas C^1, et si on a une notion d'intégrale sur E (généralement c'est possible quand E est un Banach) :
Soit $g : t \mapsto f(at + (1-t)b)$. Elle est C^1 et on a :

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|f(b) - f(a)\| &\leqslant \int_0^1 \|Df(ta + (1-t)b)(a-b)\|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \sup_{y\in[a,b]} \|Df(t)\|\,\|b-a\|
\end{aligned}$$

- Si $E = \mathbb{R}$ et f, g dérivables, on peut utiliser le théorème de Rolle. ∎

Remarque 2.2

- *Le résultat est encore vrai si f et g continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $[a,b]$ privé d'un nombre dénombrable de points.*
- *L'escalier du diable est continu sur $[0,1]$ mais de dérivée nulle presque partout. Donc le résultat est faux quand f et g sont dérivables sur $[a,b]$ privé d'un ensemble de mesure nulle.*

Corollaire 2.1 *Soit E un Banach, $f :]a,b[\to E$ continue, dérivable à droite telle que $\lim\limits_{t\to a} f'_d(t)$ existe. Alors f est prolongeable par une application continue et dérivable à droite sur $[a,b[$.*

Démonstration. $f'_d(t)$ a une limite en a donc il existe $\eta > 0$ et $M \geqslant 0$ tel que $\|f'_d(t)\|_E \leqslant M$ pour tout $t \in]a, a+\eta[$.

Par le théorème des accroissements finis avec $g = M(\mathrm{Id} - a)$, comme $\|f_d'(t)\|_E \leqslant g'(t) = M$, on a, pour $t \geqslant s \in]a, a+\eta[$, $\|f(t) - f(s)\|_E \leqslant g(t) - g(s) = M(t-s)$.

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $|t-a| \leqslant \delta$ et $|s-a| \leqslant \delta$, alors $\|f(t) - f(s)\|_E \leqslant \varepsilon$.

E est complet donc f a une limite à droite en a notée $f(a)$.

Notons $l = \lim\limits_{\substack{t \to a \\ t > a}} f_d'(t)$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $|t-a| \leqslant \eta$ alors $\|f_d'(t) - l\|_E \leqslant \varepsilon$.

Par le TAF, $\|f(t) - f(a) - (t-a)l\|_E \leqslant \varepsilon(t-a)$.

Donc f est dérivable à droite en a de dérivée l. ∎

2.2 Cas général

<u>THÉORÈME 2.3</u> *Soient E, F deux espaces vectoriels normés, $f : U \to F$ avec U un ouvert de E.*

Pour tout $a, b \in U$ tels que $[a,b] \subset U$, on a :

$$\begin{aligned} \|f(b) - f(a)\|_F &\leqslant \|b-a\|_E \sup_{t \in [0,1]} |||Df(ta + (1-t)b)||| \\ &\leqslant \|b-a\|_E \sup_{y \in [a,b]} |||Df(y)||| \end{aligned}$$

Démonstration. Posons :

$$\widetilde{f} : \begin{cases} [0,1] & \to \quad F \\ t & \mapsto \quad f(ta + (1-t)b) \end{cases}$$

$\widetilde{f}$ est continue et dérivable sur $[0,1]$.

On a $\widetilde{f}'(t) = Df(ta + (1-t)b)(b-a)$. Donc :

$$\left\|\widetilde{f}'(t)\right\|_F \leqslant \sup_{t \in [0,1]} \|Df(ta + (1-t)b)(b-a)\|_F \leqslant \|b-a\|_E \sup_{y \in [a,b]} |||Df(y)|||$$

On a donc, par le TAF (avec $g(t) = t\,\|b-a\|_E \sup_{y \in [a,b]} |||Df(y)|||$) :

$$\left\|\widetilde{f}(1) - \widetilde{f}(0)\right\|_F \leqslant \|b-a\|_E \sup_{y \in [a,b]} |||Df(y)|||$$

∎

Remarque 2.3

- *Il est possible que* $\sup_{y \in [a,b]} |||Df(y)||| = \infty$

- *Si $Df(y)$ est majoré sur V avec $[a,b] \subset V$ alors $\|Df(y)\| \leqslant M$ pour $y \in [a,b]$. On a alors $\|f(b)-f(a)\|_F \leqslant M\|b-a\|_E$. Si V est convexe, alors f est lipschitzienne sur V.*
- *Si f est C^1 alors f est localement lipschitzienne. En effet, en dimension finie, la différentielle est bornée sur un voisinage compact de tout point. En dimension infinie, Df est continue en x donc pour $r > 0$, il existe un voisinage V_x de x tel que pour tout $y \in V_x$, $\|Df(y)-Df(x)\| \leqslant r$. En particulier, $\|Df(y)\| \leqslant \|Df(x)\| + r$ sur V_x et on a fini.*
- *Si $\dim F > 1$ il n'y a pas d'égalité dans les accroissements finis (prendre $\mathrm{e}^{i\cdot}$).*

Corollaire 2.2 *Soient E, F des espaces vectoriels normés, $f : U \to F$ différentiable avec U un ouvert de E, $T : E \to F$ linéaire continue.*

Soit $[a,b] \subset U$.

Alors :

$$\|f(b)-f(a)-T(b-a)\|_F \leqslant \|b-a\|_E \sup_{y\in[a,b]} \|Df(x)-T\|$$

Démonstration. TAF avec $f - T$. ∎

2.3 Applications

2.3.1 Différentielle nulle implique fonction constante

Proposition 2.1 Soit $f : U \to F$ avec U un ouvert connexe de E. Si f est différentiable sur U et $Df(x) = 0$ pour tout $x \in U$, alors f est constante sur U.

Démonstration. Soit $a \in U$ et $V = \{x \in U, f(x) = f(a)\}$.

V est clairement un fermé de U.

Soit $x_0 \in V$. Il existe $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset U$.

Si $y \in B(x_0,r)$, $[x_0,y] \subset U$ donc, via le TAF, $|f(x_0)-f(y)| \leqslant |x_0-y|\times 0 = 0$.

Donc $f(y) = f(x_0) = f(a)$ donc $y \in V$ donc $B(x_0,r) \subset V$ donc V est ouvert. On conclut par connexité puisque $a \in V \neq \varnothing$. ∎

2.3.2 Différentielles partielles

Théorème 2.4 *Soit $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ et F des espaces vectoriels normés.*

Soit U un ouvert de E, $f : U \to F$ tel que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $\partial_j f : U \to \mathscr{L}_c(E_j, F)$ existe et est continue sur U alors f est différentiable sur U et f est C^1 sur U. La réciproque est vraie.

Démonstration.
$\Rightarrow$ Soit $a \in U$. On pose :

$$L : \begin{cases} E & \to & F \\ h & \mapsto & \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(a)(h_j) \end{cases}$$

$L \in \mathscr{L}_c(E,F)$ et on a :

$$\begin{aligned} \|L(h)\|_F &= \left\| \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(a) h_j \right\|_F \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{n} |\!|\!| \partial_j f(a) |\!|\!| \, \|h_j\|_{E_j} \\ &\leqslant \|h\|_E \sum_{j=1}^{n} |\!|\!| \partial_j f(a) |\!|\!| \end{aligned}$$

Soit $g = h \mapsto f(a+h) - f(a) - L(h)$.

$$\begin{aligned} g(h) = \sum_{j=1}^{n} (f(a_1+h_1, \cdots, a_j+h_j, a_{j+1}, \cdots, a_n) \\ - f(a_1+h_1, \cdots, a_{j-1}+h_{j-1}, a_j, \cdots, a_n) - \partial_j f(a)(h_j)) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} &\|f(a_1+h_1, \cdots, a_j+h_j, a_{j+1}, \cdots, a_n) \\ &- f(a_1+h_1, \cdots, a_{j-1}+h_{j-1}, a_j, \cdots, a_n) - \partial_j f(a)(h_j)\|_F \\ &\leqslant \|h_j\|_{E_j} \sup_{\lambda \in [0,1]} |\!|\!| \partial_j f(a_1+h_1, \cdots, a_j+\lambda h_j, a_{j+1}, \cdots, a_n) - \partial_j f(a) |\!|\!| \end{aligned}$$

Posons $g_j(h_j) = f(a_1+h_1, \cdots, a_j+h_j, a_{j+1}, \cdots, a_n) - \partial_j f(a)(h_j)$.
$Dg_j(h_j)(k_j) = \partial_j f(a_1+h_1, \cdots, a_j+h_j, a_{j+1}, \cdots, a_n) - \partial_j f(a)(k_j)$.
Soit $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset U$ et $\|h\| < r$.
$\{(a_1+h_1, \cdots, a_j+\lambda h_j, a_{j+1}, \cdots, a_n), \lambda \in [0,1]\} \subset U$.
Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta_j > 0$ tel que $\|k_j\|_{E_j} \leqslant \eta_j$, $\|h_1\|_{E_1} \leqslant \eta_j$, ..., $\|h_{j-1}\|_{E_{j-1}} \leqslant \eta_j$ implique $|\!|\!| \partial_j f(a_1+h_1, \cdots, a_{j-1}+h_{j-1}, a_j+k_j, a_{j+1}, \cdots, a_n) - \partial_j f(a) |\!|\!|` \leqslant \varepsilon$.

Avec $\eta = \min_{1\leqslant j\leqslant n} \eta_i$, pour tout j, si $\|h\|_E \leqslant \eta$, on a $\sup_{\lambda\in[0,1]} \|\partial_j f(a_1 + h_1, \cdots, a_j + \lambda h_j, a_{j+1}, \cdots, a_n) - \partial_j f(a)\| \leqslant \varepsilon$.

Donc $\|g(h)\|_F \leqslant \sum_{j=1}^{n} \varepsilon \|h_j\|_{E_j} \leqslant N\varepsilon \|h\|_E$.

Donc $g(h) - f(a+h) - f(b) - L(h) = \|h\|_E \varepsilon(h)$ et f est différentiable en a de différentielle L.

On a donc $Df(a) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(a)\pi_j$ et $a \mapsto Df(a)$ est continue donc f est C^1.

$\Leftarrow$ Si f est C^1 sur U, alors on a vu que $\partial_1 f$ existe sur U.

De plus, $\partial_j f(a) = Df(a)p_j$ avec $p_j : h_j \mapsto (0, \cdots, 0, h_j, 0, \cdots, 0)$ donc $\partial_j f$ est continue sur U. ■

Corollaire 2.3 *Dans le cas $f : U \to \mathbb{R}^p$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f est C^1 sur U ssi pour tout i, j, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existe et est continue sur U.*

Application : det est C^1 car polynômial en les cœfficients.

$M \mapsto (H \mapsto \operatorname{tr}(\widetilde{M}^t H))$ et D det coïncident sur $GL_n(\mathbb{R})$ qui est dense donc elles sont égales.

2.3.3 Différentielle d'une suite de fonctions

Proposition 2.2 Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $U \to F$ avec U un ouvert connexe de E et F un Banach vérifiant :

- Pour tout n, f_n est différentiable sur U
- Pour toute boule fermée $\overline{B}(x, r) \subset U$, Df_n converge uniformément sur $\overline{B}(x, r)$ dans $\mathscr{L}_c(E, F)$.
- Il existe $a \in U$ tel que $(f_n(a))_n$ converge.

Alors $(f_n)_n$ converge uniformément sur toute boule fermée incluse dans U. On note f sa limite.

f est différentiable sur U et Df est la limite simple des Df_n. De plus, si les f_n sont C^1, alors f aussi.

Démonstration.

- Soit $b \in U$. Montrons que si $(f_n(b))_n$ converge et $r > 0$ vérifie $\overline{B}(b, r) \subset U$ alors f_n converge uniformément sur $\overline{B}(b, r)$.

Soit $x \in \overline{B}(b,r)$.

$$\begin{aligned}
\|f_{n+p}(x) - f_n(x)\|_F &\leqslant \|f_{n+p}(b) - f_n(b)\|_F \\
&\quad + \|f_{n+p}(x) - f_{n+p}(b) - (f_n(x) - f_n(b))\|_F \\
&\leqslant \|f_{n+p}(b) - f_n(b)\|_F + \|x-b\|_E \sup_{y\in[x,b]} |||Df_{n+p}(y) - Df_n(y)||| \\
&\leqslant r \sup_{y\in\overline{B}(x,r)} |||Df_{n+p}(y) - Df_n(y)|||
\end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_1(b,\varepsilon)$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$ et $p \geqslant 0$, $\|f_{n+p}(b) - f_n(b)\|_F \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_2(b,r,\varepsilon)$ tel que pour tout $n \geqslant N_2$ et $p \geqslant 0$, $\sup_{y\in\overline{B}(x,r)} |||Df_{n+p}(y) - Df_n(y)||| \leqslant \frac{\varepsilon}{2r}$.
Donc, si $n \geqslant \max(N_1,N_2)$, $\|f_{n+p}(x) - f_n(x)\|_F \leqslant \varepsilon$.
Donc $(f_n(x))_n$ est de Cauchy donc converge uniformément sur $\overline{B}(x,r)$.

- Posons $A = \{x \in U, (f_n(x))_n \text{ converge}\}$. C'est un ouvert par le point précédent.
  Soit $(x_n)_n \in A$ qui converge vers $b \in U$.
  Il existe $r > 0$ tel que $B(b,2r) \subset U$.
  Il existe n_0 tel que $x_{n_0} \in \overline{B}(b,r)$ ie $b \in \overline{B}(x_{n_0},r)$. Par le point précédent, $(f_n(b))_n$ converge donc A est fermé.
  Comme $A \neq \varnothing$, par connexité $A = U$.
- Notons g la limite simple de $(Df_n)_n$. Soit $x \in U$ tel que $B(x,r) \subset U$ et $\|h\|_E < r$.
  On a :

$$\begin{aligned}
&\|f(x+h) - f(x) - g(x)(h)\|_F \\
&= \|f_n(x+h) - f_n(x) - Df_n(x)(h)\|_F + \|(Df_n(x) - g(x))(h)\|_F \\
&\quad + \|f_n(x+h) - f_n(x) - f(x+h) + f(x)\|_F
\end{aligned}$$

  On a $f_n(x+h) - f_n(x) - Df_n(x)(h) = \|h\|_E\, \varepsilon_n(h)$.
  De plus, $\|(Df_n(x) - g(x))(h)\|_F \leqslant |||Df_n(x) - g(x)|||\, \|h\|_E$.
  On a :

$$\begin{aligned}
&\|f_n(x+h) - f_n(x) - f_{n+p}(x+h) + f_{n+p}(x)\|_F \\
&\leqslant \|h\|_E \sup_{y\in[x,x+h]} |||Df_n(y) - Df_{n+p}(y)||| \\
&\leqslant \|h\|_E \sup_{y\in B(x,\frac{r}{2})} |||Df_{n+p}(y) - Df_n(y)|||
\end{aligned}$$

  si $\|h\|_E < \frac{r}{2}$.
  Avec $p \to +\infty$,

$$\begin{aligned}
&\|f_n(x+h) - f_n(x) - f(x+h) + f(x)\|_F \\
&\leqslant \|h\|_E \sup_{y\in B(x,\frac{r}{2})} |||g(y) - Df_n(y)|||
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\|f(x+h)-f(x)-g(x)(h)\|_F$$
$$\leqslant \|h\|_E\,(\varepsilon_n(h)+2\sup_{y\in B(x,\frac{r}{2})}\|g(y)-Df_n(y)\|$$

Il existe $n(x,r)$ tel que $\sup_{y\in B(x,\frac{r}{2})}\|g(y)-Df_n(y)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}$.
Il existe $\eta>0$ tel que $\left\|\varepsilon_{n(x,r)}\right\|_F\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$.
Donc pour $\|h\|_E\leqslant\eta$, on a le résultat. ∎

Application :

- On considère un Banach E et l'exponentielle sur $\mathscr{L}_c(E)$ muni de la norme usuelle.
  Comme $\mathscr{L}_c(E)$ reste un Banach, la série qui définit l'exponentielle converge absolument (vive les normes d'algèbres) donc converge.
  Notons $f_n=M\mapsto\sum_{k=0}^{n}\frac{M^k}{k!}$.
  Les f_n sont différentiables et $Df_n(M)(H)=\sum_{k=0}^{n}\frac{D(M^k)(H)}{k!}$.
  On a $\|D(M^k)(H)\|\leqslant k\|M\|^{k-1}\|H\|$.
  Donc la norme de $D(M^k)$ dans $\mathscr{L}_c(\mathscr{L}_c(E))$ est inférieure à $k\|M\|^{k-1}$.
  La série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{D(M^n)}{n!}$ converge donc absolument et uniformément sur les boules donc e^M est différentiable.
  De plus, $D(e^M)(H)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}\sum_{i=0}^{k-1}M^iHM^{k-1-i}$.
  On a alors le fait que $t\mapsto\mathrm{e}^{Mt}$ est dérivable (et C^1) de dérivée $t\mapsto M\mathrm{e}^{Mt}$.
- On a vu que si u,v sont des isométries d'un Banach E vérifiant $\|v\|\leqslant\frac{1}{\|u^{-1}\|}$, alors $(u-v)^{-1}=u^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(vu^{-1})^k$.
  On regarde $v\mapsto(u-v)^{-1}$. Le même argument montre la différentiabilité de ce truc.

Chapitre 3

Différentielles d'ordre supérieur et formule de Taylor

3.1 La variable réelle

Définition 3.1 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé.

Soit $f : I \to E$.

Si f est dérivable sur I et $f' : I \to E$ est aussi dérivable, on dit qu'elle est deux fois dérivable et on note $f'' = (f')'$.

Par récurrence, on définit $f^{(n)}$ par $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ si $f^{(n-1)}$ est dérivable.

On peut parler de la dérivée n-ème en un point a si f a une dérivée $(n-1)$-ème sur un voisinage de a.

On dit aussi que f est C^n ssi $f^{(n)}$ est continue.

Proposition 3.1 (Formule de Leibniz) Soient $f, g : I \to E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont dérivables (resp. C^1, n fois dérivables, C^n) en a alors $\lambda f + \mu g$ aussi.

Soit $B : E \times E \to F$ bilinéaire.

$B(f, g)$ est aussi dérivable (resp. C^1, n fois dérivable, C^n) en a et :

$$B(f,g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(f^{(k)}(a), g^{(n-k)}(a))$$

Démonstration. Par récurrence, $n = 1$ étant clair.

On a :

$$B(f,g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (B(f^{(k+1)}(a), g^{(n-1-k)}(a)) + B(f^{(k)}(a), g^{(n-k)}(a))$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B(f^{(k)}(a), g^{(n-k)}(a)) + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B(f^{(k)}(a), g^{(n-k)}(a))$$
$$= B(f(a), g^{(n)}(a)) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} B(f^{(k)}(a), g^{(n-k)}(a)) + B(f^{(n)}(a), g(a))$$

Proposition 3.2 Soit $f : I \to E$ n fois dérivable en a, $\varphi : J \to \mathbb{R}$ n fois dérivable en $f(a)$ avec J un intervalle tel que $\varphi(J) \subset I$.

$\varphi \circ f$ est donc n fois dérivable en b et on obtient $(\varphi \circ f)^{(n)}(b)$ par la formule de Faà di Bruno.

Théorème 3.1 (Fomule de Taylor-Young) *Soit $f : I \to E$ avec I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.*

Si f est n fois dérivable en a alors :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + h^n \varepsilon(h)$$

Démonstration. Par récurrence, $n = 1$ étant trivial.

On applique la formule à l'ordre $n-1$ à f' :

$$f'(a+h) = f'(a) + hf''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a) + h^{n-1}\varepsilon(h)$$

Posons $g(h) = f(a+h) - (f(a) + hf'(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a))$.

On a $g'(h) = h^{n-1}\varepsilon(h)$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $|h| \leqslant \eta$ alors $|\varepsilon(h)| \leqslant \varepsilon$.

Si $|h| \leqslant \eta$, $\|g(h)\|_E = \|g(h) - g(0)\|_E \leqslant \|h\|_E \sup_{t \in [0,1]} |g'(t)| \leqslant \varepsilon \|h\|_E^n$.

D'où le résultat. ∎

Théorème 3.2 (Formule de Taylor-Lagrange) *Soit $f : I \to E$ avec I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $a \in I$ tel que f soit $n+1$ fois dérivable sur I.*

Alors :

$$\left\| f(a+h) - \left(f(a) + hf'(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) \right) \right\|$$
$$\leqslant \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in]a, a+h[} \left\| f^{(n+1)}(t) \right\|_E$$

Démonstration. On pose $g(t) = f(a+th) + (1-t)hf'(a+th) + \cdots + \frac{(1-t)^n}{n!}h^n f^{(n)}(a+th)$.

On remarque que $g'(t)$ est télescopique et vaut $\frac{(1-t)^n}{n!}h^{n+1}f^{(n+1)}(a+th)$.

On a de plus :

$$\begin{aligned}\|g'(t)\|_E &\leqslant \left\|\frac{(1-t)^n}{n!}h^{n+1}f^{(n+1)}(a+th)\right\| \\ &\leqslant \underbrace{\frac{(1-t)^n}{n!}h^{n+1}\sup_{y\in[a,a+h]}\left\|f^{(n+1)}(y)\right\|_E}_{h'(t)}\end{aligned}$$

On a $h(t) = -\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}h^{n+1}\sup\limits_{t\in[a,a+h]}\left\|f^{(n+1)}(y)\right\|_E$.

Par le TAF, $\|g(1)-g(0)\|_E \leqslant h(1)-h(0)$, ce qui est le résultat. ■

<u>Théorème 3.3</u> (Formule de Taylor avec reste intégral) *Soit $f : I \to E$ avec I un ouvert de $\mathbb{R}$ et E un Banach.*

Si f est C^{n+1} sur I et $a \in I$ tel que $a+h \in I$.

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}h^{n+1}f^{(n+1)}(a+th)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Idem que la précédente, mais il faut intégrer au lieu d'utiliser le TAF. ■

Remarque 3.1 Si $\dim(E) = 1$*, il y a égalité, mais on s'en fiche.*

3.2 Différentielle d'ordre supérieur

Soient E, F deux espaces vectoriels normés, $U \subset E$ un ouvert, $a \in U$.

<u>Définition 3.2</u> Soit $f : U \to F$ différentiable sur V voisinage de a.

Si $Df : V \to \mathscr{L}_c(E,F)$ est différentiable en a, on dit que f est deux fois différentiable en a.

On note $D^2f(a) = D(Df)(a) \in \mathscr{L}_c(E, \mathscr{L}_c(E,F))$.

Proposition 3.3

$$\Psi : \begin{cases} \mathscr{L}_c(E,\mathscr{L}_c(E,F)) & \to \quad \underbrace{\mathscr{L}_c^2(E,F)}_{\text{bilinéaires}} \\ b & \mapsto \quad \Psi(b) \end{cases}$$

avec $\Psi(b)(u,v) = (b(u))(v)$ est une isométrie bijective.

Démonstration. Si $\Psi(b) = 0$, $(b(u))(v) = 0$ pour tout u, v donc $b(u) = 0$ donc $b = 0$.

Si E et F sont de dimension finie, alors on a la surjectivité.

Sinon, $B_u : v \mapsto B(u, v)$ est linéaire et continue par continuité de B.

Posons $b : u \mapsto B_u$. $b \in \mathscr{L}_c(E, \mathscr{L}_c(E, F))$

On a $|||b(u)|||_{\mathscr{L}_c(E,F)} \leqslant |||b|||_{\mathscr{L}_c^2(E,F)} \|u\|_E$ donc $|||b|||_{\mathscr{L}_c(E,\mathscr{L}_c(E,F))} \leqslant |||B|||_{\mathscr{L}_c^2(E,F)}$.

On a de plus $B = \Psi(b)$ donc Ψ est surjective.

Montrons que Ψ est une isométrie :

$$\begin{aligned}
|||\Psi(b)||| &= \sup_{\|u\|=\|v\|=1} \|\psi(b)(u,v)\|_F \\
&= \sup_{\|u\|=\|v\|=1} \|(b(u))v\|_F \\
&= \sup_{\|u\|=1} \sup_{\|v\|=1} \|(b(u))v\|_F \\
&= \sup_{\|u\|=1} |||b(u)||| \\
&= |||b|||
\end{aligned}$$

■

<u>THÉORÈME 3.4</u> DE SCHWARZ *Soit $f : U \to F$ avec U un ouvert de E et $a \in U$.*

Si f est deux fois différentiable alors $D^2 f(a)$ est symétrique.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
&f(a+h+k) - f(a+k) - f(a+h) + f(a) - D^2 f(a)(k,h) \\
&= (\|h\|_E + \|k\|_E)^2 \varepsilon_1(\|h\|_E + \|k\|_E)
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
&f(a+h+k) - f(a+k) - f(a+h) + f(a) - D^2 f(a)(h,k) \\
&= (\|h\|_E + \|k\|_E)^2 \varepsilon_2(\|h\|_E + \|k\|_E)
\end{aligned}$$

Donc $D^2 f(a)(k,h) - D^2 f(a)(h,k) = (\|h\|_E + \|k\|_E)^2 \varepsilon_3(\|h\|_E + \|k\|_E)$.

Soit $\lambda > 0$.

$$\lambda^2(D^2 f(a)(k,h) - D^2 f(a)(h,k)) = \lambda^2(\|h\|_E + \|k\|_E)^2 \varepsilon_3(\lambda(\|h\|_E + \|k\|_E))$$

Avec $\lambda \to 0$, on a $D^2 f(a)(h,k) = D^2 f(a)(k,h)$.

De plus :

$$\begin{aligned}
&f(a+h+k) - f(a+k) - f(a+h) + f(a) - D^2 f(a)(k,h) \\
&= \underbrace{f(a+h+k) - f(a+k) - Df(a+k)(h) - (f(a+h) - f(a) - Df(a)(h))}_{B_k(h)} \\
&\quad + \underbrace{D(a+k)(h) - Df(a)(h) - D^2 f(a)(k,h)}_{c(h,k)}
\end{aligned}$$

Comme Df est différentiable en a,

$$c(h,k) = (Df(a+k) - Df(a) - D^2f(a)(k))(h) = (\|k\|_E\,\varepsilon(k))h$$

Donc

$$\|c(h,k)\|_F \leqslant \|h\|_E\,\|k\|_E\,\|\varepsilon\| = (\|h\|_E + \|k\|_E)^2\varepsilon_1'(\|h\|_E + \|k\|_E)$$

B_k est différentiable en h pour k petit.

$$\begin{aligned}
DB_k(h) &= Df(a+h+k) - Df(a+k) - Df(a+h) + Df(a)\\
&= Df(a+h+k) - Df(a) - (Df(a+k) - Df(a)) - (Df(a+h) - Df(a))\\
&= D^2f(a)(h+k) + o(\|h+k\|_E) - D^2f(a)(k) + o(\|k\|_E)\\
&\quad - D^2f(a)(h) + o(\|h\|_E)\\
&= o(\|h\|_E + \|k\|_E)
\end{aligned}$$

Or $B_k(0) = 0$ donc

$$\begin{aligned}
\|B_k(h)\|_F &\leqslant \|h\|_E \sup_{t\in[0,h]} \|DB_k(h)\|\\
&\leqslant (\|h\|_E + \|k\|_E)^2 \sup_{t\in[0,h]} |o(\|h\|_E + \|k\|_E)|\\
&\leqslant o((\|h\|_E + \|k\|_E)^2)
\end{aligned}$$

Et apparament, ça conclut. ■

Corollaire 3.1 *Pour calculer $D^2f(a)(h,k)$, il suffit de connaître la valeur de $D^2f(a)(h,h)$ pour tout h.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser la polarisation :

$$\begin{aligned}
D^2f(a)(h,k) &= \frac{D^2f(a)(h+k,h+k) - D^2f(a)(h-k,h-k)}{4}\\
&= \frac{D^2f(a)(h+k,h+k) - D^2f(a)(k,k) - D^2f(a)(h,h)}{2}
\end{aligned}$$

Corollaire 3.2 *Si f est deux fois différentiable en a, alors pour tout i,j, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ existe et on a ;*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

De plus $D^2f(a)(h,k) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i k_j$ *et :*

$$D^2f(a)(h,h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i^2} h_i^2 + 2\sum_{i<j} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$$

Démonstration. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existe est vaut $Df(a)e_i$. Sa différentielle selon e_j vaut $D^2f(a)(e_i,e_j)$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ existe donc et vaut $D^2f(a)(e_i,e_j)$. ∎

Définition 3.3 $D^2f(a)$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$. Pour une base fixée et le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ canonique dans cette base, il existe une matrice H_a telle que $D^2f(a)(h,k) = \langle H_a h, k\rangle$.

H_a est appellée matrice hessienne.

Définition 3.4 f est deux fois différentiable ssi elle l'est en tout point.

f est C^2 ssi f est deux fois différentiable et $a \mapsto D^2f(a)$ et continue.

Proposition 3.4 f est C^2 sur U ssi pour tout i,j, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ existe et $a \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ est continue.

Démonstration.

- $\Rightarrow$ Si f est C^2, f est deux fois différentiable donc les dérivées partielles secondes existent et valent $D^2f(a)(e_i,e_j)$ donc sont continues.
- $\Leftarrow$ Les $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existent sur U et $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ a des dérivées partielles continues donc est C^1.
  En particulier, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ est continue pour tout i donc f est C^1.
  Comme $Df(a)(h) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(h_i)$ donc $x \mapsto Df(x)(h)$ a des dérivées partielles continues dans toutes les directions donc est C^1. ∎

Exemple 3.1 det est deux fois différentiable et

$$D^2(\det(A))(H,K) = \det(A)\operatorname{tr}(A^{-1}KA^{-1}H)$$

3.3 Formes différentielles

Définition 3.5 Une forme différentielle de degré 1 sur U (ouvert de E) est une application $U \to \mathscr{L}_c(E,\mathbb{R}) = E'$. On dit qu'une forme différentielle est exacte ssi c'est une différentielle.

Théorème 3.5 *Soit* $\omega = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \,\mathrm{d}x_i$ *une forme différentielle* C^1 *sur* U *ouvert de* $\mathbb{R}^n$.

Si ω *est exacte, on a pour tout* i,j, $\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$.

Réciproquement, si pour tout i,j, $\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$ *et si* U *est étoilé, alors* ω *est exacte.*

Démonstration. La première assertion est débile par Schwarz.

On suppose ensuite U étoilé par rapport à 0.

Soit $f = x \mapsto \int_0^1 \omega(tx)x \, \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 a_i(tx) \, \mathrm{d}t$.

$\omega(tx)x$ est dérivable en x_i pour tout i et

$$\frac{\partial \omega(tx)x}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} t \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(tx)x_j + a_i(tx)$$

qui est continue en (t, x_i) donc on peut dériver sous l'intégrale.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) &= \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} t \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(tx)x_i + a_j(tx) \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} t \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(tx)x_i + a_j(tx) \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ta_j(tx)) \, \mathrm{d}t \\
&= a_j(x)
\end{aligned}$$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est C^1 donc f est C^2 et $\omega = \mathrm{d}f$. ∎

Exemple 3.2 $\omega(x, y) = \frac{y^2}{(x+y)^2} \, \mathrm{d}x + \frac{x^2}{(x+y)^2} \, \mathrm{d}y$ sur $U = \{(x, y), x + y > 0\}$.

ω est C^1 sur U.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{(x+y)^2}\right) &= \frac{2y(x+y)^2 - 2(x+y)y^2}{(x+y)^4} \\
&= \frac{2xy + 2y^2 - 2y^2}{(x+y)^3} \\
&= \frac{2xy}{(x+y)^3}
\end{aligned}$$

$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x^2}{(x+y)^2}) = \frac{2xy}{(x+y)^3}$ donc ω est exacte.

On cherche f tel que $\omega = \mathrm{d}f$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^2}{(x+y)^2}$ donc $f(x, y) = -\frac{y^2}{x+y} + \varphi(y)$.

De plus $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y^2 - 2y(x+y)}{(x+y)^2} + \varphi'(y)$.

Donc $\frac{x^2}{(x+y)^2} = \varphi'(y) + \frac{y^2 - 2xy}{(x+y)^2}$.

On trouve $\varphi(y) = \frac{xy}{x+y} + \lambda$.

3.4 Fonctions convexes

3.4.1 Cas réel

Définition 3.6 Pour toute fonction $f : C \to \mathbb{R}$ avec C un convexe de E, on appelle épigraphe de f et on note $\mathrm{Ep}(f)$ l'ensemble $\{(x, y) \in C \times \mathbb{R}, y \geqslant f(x)\}$.

On dit que f est convexe ssi pour tout $t \in [0, 1]$ et $x, y \in C$, $f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$ ssi $\mathrm{Ep}(f)$ est convexe.

Théorème 3.6 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$.*

g est convexe ssi

- *g est continue sur l'intérieur de I et si $l \in \partial I$, $\lim\limits_{x \to l} g(x) \leqslant g(l)$*
- *g dérivable à droite et à gauche en tout point de l'intérieur de I et pour tout $t_1 < t_2$ dans l'intérieur,*

$$g'_g(t_1) \leqslant g'_d(t_1) \leqslant \frac{g(t_2) - g(t_1)}{t_2 - t_1} \leqslant g'_g(t_2) \leqslant g'_d(t_2)$$

De plus g est dérivable sauf sur un ensemble au plus dénombrable.

Corollaire 3.3 *Soit $g : I \to \mathbb{R}$ est dérivable, I un ouvert.*

g est convexe ssi g' est croissante.

Si g est deux fois dérivable, g est convexe ssi $g'' \geqslant 0$.

Démonstration.

$\Rightarrow$ Soit t dans l'intérieur de I, $k > h > 0$.

$$\frac{g(t+h) - g(t)}{h} \leqslant \frac{g(t+k) - g(t)}{k}$$

On a $t + h = \lambda t + (1-\lambda)(t+k)$.

Donc $g(t+h) \leqslant \lambda g(t) + (1-\lambda) g(t+k) = (1 - \frac{h}{k}) g(t) + \frac{h}{k} g(t+k)$.

Donc $g'_d(t) = \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{g(t+h)-g(t)}{\leqslant} \frac{g(t+k)-g(t)}{h}$ donc $g'_d(t)$ existe et est finie.

De même, si $h < k < 0$, $g'_g(t) \geqslant \frac{g(t+h)-g(t)}{h}$ existe et est finie.

Enfin, si $h < 0 < k$, on obtient $g'_g(t) \leqslant g'_d(t)$.

De plus, g'_d est croissante donc continue presque partout.

$\Leftarrow$ Soit $a < b \in I$.

On a $g(t) = f(t) - f(a) - \frac{t-a}{b-a}(f(b) - f(a)) = f(t) - ((1 - \frac{t-a}{b-a}) f(a) + \frac{t-a}{b-a} f(b))$.

Il suffit de montrer que $g(t) \geqslant 0$ sur $]a, b[$.

Par l'absurde, s'il existe $t_0 \in]a, b[$ tel que $g(t_0) > 0$.

On a $g(t') = \max g > 0$ et $g'_g(t') \geqslant 0$ et $g'_d(t') \leqslant 0$.

Or $g'_g(t') \leqslant g'_d(t')$ donc $g'(t') = 0$. ∎

3.4.2 Cas général

<u>Théorème 3.7</u> *Soit $f : C \to \mathbb{R}$ différentiable avec C un ouvert.*

f est convexe ssi pour tout $a, b \in C$, $Df(a)(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant Df(b)(b-a)$.

Démonstration.

$\Rightarrow$ Soit $g(t) = f((1-t)a + tb)$. g est convexe et dérivable.
$g'(t) = Df((1-t)a+tb)(b-a)$ donc $g'(0) \leqslant \frac{g(1)-g(0)}{1-0} \leqslant g'(1)$.
D'où le résultat.

$\Leftarrow$ On pose $g(t) = f((1-t)a+tb)$.
$g'(t) = Df((1-t)a+tb)(b-a)$
Si $t_1 < t_2$, on a $Df((1-t_1)a + t_1 b)((t_2-t_1)(b-a)) \leqslant Df((1-t_2)a + t_2 b)((t_2-t_1)(b-a))$.
Donc $g'(t_1) \leqslant g'(t_2)$. g' est croissante donc g est convexe. Comme c'est vrai pour tout a, b, f est connexe. ∎

Proposition 3.5 Si f est deux fois dérivable, f est convexe ssi $D^2 f(a)$ est une forme quadratique positive pour tout $a \in C$.

Démonstration.

$\Rightarrow$ Si f est convexe, pour tout a, b, $D^2 f(ta + (1-t)b)(b-a, b-a) \geqslant 0$
Si $\alpha \in C$, $\alpha = \frac{\alpha-h}{2} + \frac{\alpha+h}{2}$.
Il existe r tel que $B(\alpha, r) \subset C$. Si $\|h\| \leqslant r$, $D^2 f(\alpha)(h,h) \geqslant 0$ donc $D^2 f(\alpha) \geqslant 0$.

$\Leftarrow$ Si $D^2 f(a) \geqslant 0$, $g : t \mapsto f(ta + (1-t)b)$ est deux fois dérivable est $g'' = D^2 f(ta + (1-t)b)(b-a, b-a) \geqslant 0$.
Donc f est convexe. ∎

3.5 Différentielle d'ordre supérieur

<u>**Définition 3.7**</u> Soit $f : U \to F$ avec $U \subset E$ un ouvert et $a \in U$.

On dit que f est n fois différentiable en a ssi f est $n-1$ fois différentiable sur un voisinage de a et $D^{n-1} f$ est différentiable en a.

On pose alors $D^n f(a) = D(D^{n-1} f)(a)$. On utilise de plus des isomorphismes isométriques pour se ramener à $D^n f(a) \in \mathscr{L}_c^n(E, F)$.

Proposition 3.6 Soit $a \in U$. Si f est n fois différentiable en a alors $D^n f(a)$ est symétrique.

Démonstration. Par récurrence : le cas $n = 2$ se fait avec le théorème de Schwarz.

Si c'est vrai pour $n-1$.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
Si $\sigma(1) = 1$,

$$\begin{aligned} D^n f(a)(h_1, \cdots, h_n) &= D^{n-1}(Df(x)(h_1))(h_2, \cdots, h_n) \\ &= D^{n-1}(Df(x)(h_1))(h_{\sigma(2)}, \cdots, h_{\sigma(n)}) \\ &= D^n f(a)(h_{\sigma(1)}, \cdots, h_{\sigma(n)}) \end{aligned}$$

Sinon, $\sigma = \sigma'(1\,2)\sigma'$ avec $\sigma'(1) = 1$.
Il suffit donc de le prouver pour $(1\,2)$. C'est vrai par Schwarz. ■

Proposition 3.7 Sous les mêmes hypothèses, $D^n f(a)(h, \cdots, h) = \frac{\mathrm{d}^n f(a+th)}{\mathrm{d}t^n}$.

Définition 3.8 f est n fois différentiable sur U ssi f est n fois différentiable en tout point de U.

f est C^n sur U ssi f est n fois différentiable sur U et $x \mapsto D^n f(x)$ est continue.

Proposition 3.8 Une application n-linéaire continue est C^∞.

Proposition 3.9 Si f est n fois différentiable en a et g en $f(a)$ alors $g \circ f$ l'est en a.

Démonstration. Récurrence ■

3.6 Formules de Taylor

Proposition 3.10 (Taylor-Young) Soit E, F des espaces vectoriels normés, $U \subset E$ un ouvert, $f : U \to F$ n fois différentiable en $a \in U$ tel que $[a, a+h] \subset U$.

$$f(a+h) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} D^i f(a)(\underbrace{h, \cdots, h}_{i \text{ fois}}) + o(\|h\|^n)$$

Démonstration. Par récurrence, $n = 1$ débile.

Si c'est vrai pour $n-1$, soit $\varphi(h) = f(a+h) - \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} D^i f(a)(\underbrace{h, \cdots, h}_{i \text{ fois}})$.

On a $D\varphi(h) = Df(a+h) - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i-1)!} D^i f(a)(\underbrace{h, \cdots, h}_{i \text{ fois}})$.

Par hypothèse de récurrence appliquée à Df, $D\varphi(h) = o(\|h\|^{n-1})$. Donc $\varphi(h) = o(\|h\|^n)$. ■

Proposition 3.11 (Taylor-Lagrange) Sous les mêmes hypothèses, avec f $n+1$ différentiable,

$$\left|f(a+h)-\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}D^if(a)(\underbrace{h,\cdots,h}_{i\text{ fois}})\right| \leqslant \frac{\|h\|^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{[a,a+h]}\|D^{n+1}f(a)\|$$

Démonstration. On applique Taylor-Lagrange dans le cas réel à $t\mapsto f(a+th)$ sur $[0,1]$. ■

Proposition 3.12 (reste intégral) Si F est un Banach et f C^{n+1} sur U avec $[a,a+h]\subset U$,

$$f(a+h)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}D^if(a)(\underbrace{h,\cdots,h}_{i\text{ fois}})+\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}D^{n+1}f(a+th)(h,\cdots,h)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. On applique Taylor avec reste intégral dans le cas réel à $t\mapsto f(a+th)$ sur $[0,1]$. ■

Chapitre 4

TIL et TFI

Dans tout le chapitre, E et F sont des espaces de Banach.

4.1 Théorème d'inversion locale

Définition 4.1 Soit $U \subset E$ et $V \subset F$ deux ouverts. $f : U \to V$ est un C^1 difféomorphisme ssi f est bijective, C^1 sur U et f^{-1} C^1 sur V.

Remarque 4.1
- *$x \mapsto x^2$ est un homéomorphisme C^1 mais pas un C^1 difféomorphisme.*
- *En différentiant $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$, on a $Df(f^{-1}(y)) \circ Df^{-1}(y) = \mathrm{Id}$. En différentiant aussi $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$, on obtient $Df^{-1}(y) = Df(f^{-1}(y))^{-1}$.*
- *Soit $T \in \mathscr{L}_c(E, F)$ bijective. $T^{-1} \in \mathscr{L}_c(F, E)$.*

Théorème 4.1 *Soit $U \subset E$ un ouvert, $f : U \to F$ C^1 et $a \in U$ tel que $Df(a)$ soit inversible.*

Il existe $\widetilde{U}$ un voisinage de a et $\widetilde{V}$ un voisinage de $f(a)$ tel que $f : \widetilde{U} \to \widetilde{V}$ soit un C^1 difféomorphisme.

Démonstration.
- Montrons qu'il existe $r_1, r_2 > 0$ tel que pour tout $y \in B(f(a), r_2)$, il existe un unique $x \in \overline{B}(a, r_1)$ tel que $y = f(x)$.
  On aura alors $f : f^{-1}(B(f(a), r_2)) \to B(f(a), r_2)$ bijective et
  $$f^{-1}(B(f(a), r_2)) \subset \overline{B}(a, r_1)$$
  Soit $y \in B(f(a), r_2)$ et r_2 à préciser. Soit $\varphi_y(x) = x + Df(a)^{-1}(y - f(x))$.
  On a $D\varphi_y(x) = \mathrm{Id} - Df(a)^{-1}Df(x) = Df(a)^{-1}(Df(a) - Df(x))$.
  Pour tout $\eta > 0$ il existe $r_1 > 0$ tel que $x \in \overline{B}(a, r_1) \Rightarrow \|Df(a) - Df(x)\| \leqslant \eta$. On a donc $\|D\varphi_y(x)\| \leqslant \|Df(a)^{-1}\|\eta$.
  Pour $\eta \leqslant \frac{1}{2\|Df(a)^{-1}\|}$ alors $\|D\varphi_y(x)\| \leqslant \frac{1}{2}$.

Par le TAF, φ_y est contractante sur $\overline{B}(a, r_1)$ de rapport $\frac{1}{2}$.
Soit $x \in \overline{B}(a, r_1)$.

$$\begin{aligned}
\|\varphi_y(x) - a\| &\leqslant \|\varphi_y(x) - \varphi_y(a)\| + \|\varphi_y(a) - a\| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\|x - a\| + |||Df(a)^{-1}|||\,\|y - f(a)\| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\|x - a\| + |||Df(a)^{-1}|||r_2 \\
&\leqslant \frac{r_1}{2} + |||Df(a)^{-1}|||r_2 \\
&\leqslant r_1
\end{aligned}$$

pour $r_2 \leqslant \frac{r_1}{2|||Df(a)^{-1}|||}$.
Pour ce choix de r_1 et r_2, on a $\varphi_y(\overline{B}(a, r_1)) \subset \overline{B}(a, r_1)$ et φ_y strictement contractante sur $\overline{B}(a, r_1)$.
On conclut par le théorème du point fixe.

- Montrons que $f^{-1} : B(f(a), r_2) \to f^{-1}(B(f(a), r_2))$ est continue.
Soit $y_1, y_2 \in B(f(a), r_2)$.

$$\begin{aligned}
\left\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\right\| &= \left\|\varphi_{y_1}(f^{-1}(y_1)) - \varphi_{y_2}(f^{-1}(y_2))\right\| \\
&\leqslant \left\|\varphi_{y_2}(f^{-1}(y_2)) - \varphi_{y_1}(f^{-1}(y_2))\right\| \\
&\qquad + \left\|\varphi_{y_1}(f^{-1}(y_2)) - \varphi_{y_2}(f^{-1}(y_2))\right\| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\right\| + |||Df(a)^{-1}|||\,\|y_1 - y_2\| \\
&\leqslant 2|||Df(a)^{-1}|||\,\|y_1 - y_2\|
\end{aligned}$$

D'où la lipschitzianité et la continuité.

- On montre que f^{-1} est différentiable en $f(a)$ et $Df^{-1}(f(a)) = Df(a)^{-1}$.
$f(a+h) = f(a) + Df(a)(h) + o(h)$ donc $Df(a)^{-1}(f(a+h) - f(a)) = h + Df(a)^{-1}(o(h))$.
On pose $k = f(a+h) - f(a)$. $a+h = f^{-1}(f(a)+k)$ donc $h = f^{-1}(f(a)+k) - f^{-1}(f(a))$.
$f^{-1}(f(a)+k) = f^{-1}(f(a)) + Df(a)^{-1}(k) - Df(a)^{-1}(o(h))$.
Par l'étape 2, si h est suffisament petit : $\|h\| \leqslant 2|||Df(a)^{-1}|||\,\|k\|$, alors :

$$f^{-1}(f(a)+k) = f^{-1}(f(a)) + Df^{-1}(a)(k) + o(k)$$

Donc f^{-1} est différentiable en $f(a)$.

- Soit $y \in B(f(a), r_2)$. Par construction, $f^{-1}(y) \in \overline{B}(a, r_1)$.
Par l'étape 1, $|||Df(a) - Df(f^{-1}(y))||| \leqslant \frac{1}{2|||Df(a)^{-1}|||}$.

Donc $Df(f^{-1}(y)) = Df(a)(\mathrm{Id} + \underbrace{Df(a)^{-1}(Df(f^{-1}(y)) - Df(a)}_{\|\cdot\| \leqslant \frac{1}{2}})$.
Donc $Df(f^{-1}(y))$ est une isométrie.
On remplace a par $f^{-1}(y)$ dans les preuves précédentes.
f^{-1} est donc différentiable en y et $Df^{-1}(y) = Df(f^{-1}(y))^{-1}$. ∎

Remarque 4.2 Si $\dim(E)$ *est finie alors* $\dim(F)$ *l'est et* $\dim(E) = \dim(F)$*. De plus $Df(a)$ peut être identifiée à une matrice. Il suffit alors de vérifier que* $\det(Df(a)) \neq 0$*.*

Exemple 4.1

- Dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, $f : X \mapsto X^2$.
  $Df(X)(H) = XH + HX$ donc $Df(\mathrm{Id})(H) = 2H$.
  $Df(\mathrm{Id})$ est inversible. Donc f est un C^1 difféomorphisme d'un voisinage de Id sur un voisinage de Id.
  On pourrait donc définir une application racine carrée sur un voisinage de Id.
- Soit l'application :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (\mathrm{e}^x \cos(y), \mathrm{e}^x \sin(y)) \end{cases}$$

  La jacobienne est :

$$J = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \cos(y) & -\mathrm{e}^x \sin(y) \\ \mathrm{e}^x \sin(y) & \mathrm{e}^x \cos(y) \end{pmatrix}$$

  $\det(J) = \mathrm{e}^{2x}$ donc J est inversible.
  f est donc un C^1 difféomorphisme au voisinage de chaque point de $\mathbb{R}^2$ mais pas un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même.

<u>THÉORÈME 4.2</u> *Soit U un ouvert de E et $f : U \to F$ C^1 telle que :*

- *Pour tout $x \in U$, $Df(x)$ est un isomorphisme.*
- *f est injective*

Alors $f(U)$ est un ouvert de F et f est un C^1 difféomorphisme de U dans $f(U)$.

Démonstration. Soit $y \in f(U)$.
Il existe $x \in U$ tel que $y = f(x)$.
$Df(x)$ est un isomorphisme donc par le TIL, f est un C^1 difféomorphisme d'un voisinage de x vers un voisinage de y inclus dans $f(U)$. Donc $f(U)$ est ouvert.
$f^{-1} : f(U) \to U$ est bien définie par injectivité de f.

Par le TIL, pour tout $y \in f(U)$, f^{-1} est différentiable en y de différentielle $Df(f^{-1}(y))^{-1}$ et f^{-1} est C^1 au voisinage de y. ■

Exemple 4.2

- Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^1 telle que pour tout x, $|||Df(x)||| \leqslant \lambda < 1$.
  Alors :
  $$F : \begin{cases} \mathbb{R}^{2n} & \to & \mathbb{R}^{2n} \\ (x,y) & \mapsto & (x - f(y), y - f(x)) \end{cases}$$
  est un C^1 difféomorphisme.
  - ▶ En effet, $DF(x,y)(h,k) = (h - Df(y)(k), k - Df(x)(h))$ donc si $DF(x,y)(h,k) = 0$ alors $h = Df(y)(k)$ et $k = Df(x)(h)$.
    Donc $\|k\| \leqslant \lambda \|h\| \leqslant \lambda^2 \|k\|$.
    Donc $\|k\| = 0$ donc $k = h = 0$.
  - ▶ f est injective car si $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$ par le TAF, $\|x_1 - x_2\| \leqslant \lambda \|y_1 - y_2\| \leqslant \lambda^2 \|x_1 - x_2\|$.
    Donc $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$.
  - ▶ Maintenant on montre la surjectivité :
    Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^{2n}$.
    On pose $\varphi(x,y) = (a,b) + (x,y) + (x - f(y), y - f(x)) = (a,b) + (f(y), f(x))$.
    On a $D\varphi(x,y)(h,k) = (Df(y)(k), Df(x)(h))$ donc $|||D\varphi(x,y)||| \leqslant \lambda < 1$ donc on peut appliquer le théorème du point fixe.
    On a alors $\varphi(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$ donc $(a,b) = F(x_0, y_0)$.

  Donc F est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathbb{R}^{2n}$.
- Soit g continue sur $[0,1]$. On cherche $y \in C^1([0,1])$ telle que $y' + y^2 = g$ et $y(0) = \lambda$.
  On pose :
  $$\varphi : \begin{cases} C^1([0,1]) & \to & C^0([0,1]) \times \mathbb{R} \\ y & \mapsto & (y' + y^2, y(0)) \end{cases}$$
  $\varphi(0) = (0,0)$ et $D\varphi(y)(k) = (k' + 2yk, k(0))$ donc $D\varphi(0)(k) = (k', k(0))$ qui est clairement inversible.
  Par le TIL, φ est un C^1 difféomorphisme d'un voisinage de 0 sur un voisinage $(0,0)$.
  Il existe $r > 0$ tel que pour tout $|\lambda| \leqslant r$ et $g \in C^0([0,1])$ telle que $\|g\| \leqslant r$, il existe un unique $y \in C^1([0,1])$ vérifiant $y' + y^2 = g$ et $y(0) = \lambda$. De plus, y est dans un voisinage de 0.

Exemple 4.3 Soit $k \in C^0([0,1]^2)$ et $g \in C^0([0,1])$. On cherche $u \in C^0([0,1])$ tel que :

$$u(x) + \int_0^1 k(x,y) u^2(y) \,\mathrm{d}y = g(x)$$

On pose $\phi : u \mapsto u + \int_0^1 k(\cdot, x)u^2(x)\,\mathrm{d}x$

$\phi(0) = 0$, $D\phi(u)(h) = h + 2\int_0^1 k(x,y)u(y)h(y)\,\mathrm{d}y$.

$\phi(u+th)$ est dérivable et $D\phi(0) = \mathrm{Id}$ qui est un isomorphisme donc il existe U, V voisinages de 0 tel que $\phi : U \to V$ soit un C^1 difféomorphisme.

Ce qui assure l'existence et l'unicité d'un u qui marche pour g suffisamment petit.

Proposition 4.1 Soit $f : U \to F$ C^n.

Si f est un C^1 difféomorphisme, f^{-1} est C^n.

Démonstration. Par récurrence en utilisant $Df^{-1}(y) = (Df(f^{-1}(y)))^{-1}$. ■

COROLLAIRE 4.1 *Si dans les hypothèses du TIL, f est aussi de classe C^n, sa restriction est un C^n-difféomorphisme.*

4.2 Théorème des fonctions implicites

THÉORÈME 4.3 *Soit E, F, G des Banachs, $U \subset E$, $V \subset F$ ouverts.*

Soit $f : U \times V \to G$ C^1 et $a \in U \times V$ tel que $f(a) = 0$ et $D_{a_2}f(a)$ soit un isomorphisme de F dans G.

Il existe des voisinages U', V' de a_1 et a_2 et $\varphi : U' \to V'$ de classe C^1 tel que ($f(x,y) = 0$ sur $U' \times V'$) ssi ($y = \varphi(x)$ sur U').

Démonstration. On pose :

$$F : \begin{cases} U \times V & \to & E \times G \\ (x,y) & \mapsto & (x, f(x,y)) \end{cases}$$

F est C^1 et $DF(a)(h,k) = (h, D_{a_1}f(a)(h) + D_{a_2}f(a)(k))$ qui est un isomorphisme.

Par le TIL, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de (a_1, a_2) et $\mathcal{V}$ de $(a_1, 0)$ tel que $F : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ soit un C^1 difféomorphisme.

Soit U', V' des voisinages de a_1 et a_2 tel que $U' \times V' \subset \mathcal{U}$.

Alors $F : U' \times V' \to W = F(U' \times V')$ est un C^1 difféomorphisme.

Pour tout $x \in U'$ tel que $(x, 0) \in W$, il existe un unique x', y tel que $F(x', y) = (x, 0)$.

On pose $y = \varphi(x) = \pi_F(F^{-1}(x, 0))$.

On restreint U' : $U'' = \{x \in U', (x,0) \in W\}$. On a $f(x,y) = 0$ sur $U'' \times V'$ ssi $y = \varphi(x)$ sur U'' et φ est C^1 par composition. ■

Remarque 4.3

- *On peut supposer f continue. On a alors l'existence de $D_{a_2}f$ au voisinage de a. Si on suppose sa continuité, on a l'existence de φ, mais on ne sait pas si elle est C^1.*
- *Le théorème n'implique pas que $f(x,z)=0 \Rightarrow z=y$. En revanche, c'est vrai si $z \in V'$.*
- *On a $f(x,\varphi(x))=0$ donc $D_{a_1}f(x,\varphi(x))+D_{a_2}f(x,\varphi(x))D\varphi(x)=0$.*
- *Si f est C^n, φ l'est aussi.*

Exemple 4.4

- $f:(x,y)\mapsto x^2+y^2-2$ en $(1,1)$ vérifie les conditions du théorème. On a $f(-1,-1)=f(1,1)$ donc $(-1,-1)\notin U$.
- Soit l'équation $x^n+\lambda x^2-1=0$.
  Si $\lambda=0$, $x=1$ est solution et la différentielle partielle de f par rapport à x en $(1,0)$ est la multiplication par n donc inversible.
  En différentiant $x^n(\lambda)+\lambda x^2(\lambda)-1=0$ par rapport à λ, comme $x(0)=1$, $x'(0)=-\frac{1}{n}$. De même $x''(0)=\frac{5-n}{n^2}$.
- On considère l'équation $y=\sin(y')$ avec $y(0)=\lambda$.
  On prend $E=\mathbb{R}$, $F=C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\phi:(\lambda,y)\mapsto(\sin(y')-y,y(0)-\lambda)$.
  $\phi(0,0)=(0,0)$ et $D_y\phi(0,0)(h)=(h'-h,h(0))$ est un isomorphisme.
  Donc il existe un voisinage U de 0 dans $\mathbb{R}$ et V de 0 dans $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\psi:U\to V$ tel que $\phi(\lambda,y)=0$ ssi $y=\phi(\lambda)$.
  En particulier, pour tout $\lambda\in U$, il existe un unique $y\in V$ tel que $y=\sin(y')$.

Chapitre 5

Problèmes d'extrema

5.1 Problème général

On prend $U \subset E$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}$.

<u>THÉORÈME 5.1</u> *Si $f(a) = \min_{x \in U} f(x)$ et f différentiable en a alors $Df(a) = 0$.*

Démonstration. Il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$.

Pour tout $h \in E$ tel que $|h| < r$, on pose $g(t) = f(a + th)$.

g est dérivable en 0 et $g'(0) = Df(a)(h)$. $g'(0) = 0$ donc $Df(a)(h) = 0$ donc par dilatation $Df(a) = 0$. ■

Proposition 5.1 Si $C \subset U$ est convexe et $f(a) = \min_{x \in C} f(x)$ avec $a \in C$ et f différentiable en a alors $Df(a)(v - a) \geqslant 0$ pour tout $v \in C$.

Démonstration. Soit $v \in C$.

On pose $g(t) = f(ta + (1 - t)v)$.

g est dérivable à gauche en 1 et $g'_g(1) = Df(a)(a - v)$.

Comme g atteint son minimum en 1, $g'_g(1) \leqslant 0$ d'où le résultat. ■

Remarque 5.1 Si $E = \mathbb{R}^n$, $Df(a) = 0$ signifie $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

C'est une condition non suffisante (prendre $x \mapsto x^3$).

Proposition 5.2 Soit $a \in U$ et f deux fois différentiable en a tel que $f(a) = \min_{x \in U} f(x)$.

On a $D^2 f(a) \geqslant 0$.

Démonstration. S'il existe $h \in E$ tel que $D^2f(a)(h,h) < 0$, alors par Taylor-Young à l'ordre 2, on a :

$$f(a+h) = f(a) + 0 + \frac{1}{2}D^2f(a)(h,h) + o(\|h\|^2)$$

On a $f(a+\lambda h) = f(a) + \frac{\lambda^2}{2}D^2f(a)(h,h) + o(\|\lambda h\|^2)$.
Il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $|\lambda| < \varepsilon$ alors $o(\|\lambda h\|^2) < \frac{\lambda^2|Df(a)(h,h)|}{4}$.
On a alors $f(a+\lambda h) < f(a) + \frac{3\lambda^2}{4}Df(a)(h,h)$.
Donc, avec $\lambda \to 0$, $f(a) < f(a)$. Contradiction. ■

Proposition 5.3 Soit $a \in U$ tel que f soit deux fois différentiable en a, $Df(a) = 0$ et $D^2f(a)$ soit cœrcive (ie il existe $\alpha > 0$ tel que $D^2f(a)(h,h) \geqslant \alpha\|h\|^2$) alors f a un minimum local strict en a (ie il existe un voisinage V de a tel que $f(a) = \min_{x\in V} f(x)$).

Démonstration.

$$f(a+h) = f(a) + \frac{D^2f(a)(h,h)}{2} + o(\|h\|^2) \geqslant f(a) + \frac{\alpha}{2}\|h\|^2 + \|h\|^2\varepsilon(h)$$

Il existe $r > 0$ tel que si $\|h\| < r$ alors $\|\varepsilon(h)\| \leqslant \frac{\alpha}{4}$.
On a alors $f(a+h) \geqslant f(a) + \frac{\alpha}{4}\|h\|^2$.
Donc $f(a) = \min_{x\in B(a,r)} f(x)$. ■

Remarque 5.2

- *Si $E = \mathbb{R}^n$ alors $D^2f(a)(h,h)$ est une forme quadratique et on peut étudier son signe. $D^2f(a)$ est de plus cœrcive ssi elle est strictement positive.*
  En effet, si elle est strictement positive, elle est continue et strictement positive sur $\mathbb{S}^{n-1}$ qui est compact donc admet un minimum strictement positif dessus en h_0.
  Si $h \in \mathbb{R}^n$,

$$D^2f(a)(h,h) = \|h\|^2 D^2f(a)\left(\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|}\right) \geqslant \|h\|^2 D^2f(a)(h_0,h_0)$$

- *On peut aussi passer par la hessienne et ses valeurs propres ($\alpha = \min \mathrm{Sp}(H_a)$).*
- *En dimension infinie, c'est faux : $E = l^2$ avec $D^2f(a)(h,h) = \sum_{n\geqslant 0}\frac{h_n^2}{n} > 0$ mais n'est pas cœrcive (en e_n par exemple).*

Exemple 5.1

- Sur L^2, on pose $J(f) = \int_{\mathbb{R}} f^2 - fg$.
  $DJ(f)(h) = \int_{\mathbb{R}} 2fh - hg$.
  Si J est minimale en f alors $DJ(f)(h) = 0$ et $f = \frac{g}{2}$.
  De plus, $D^2J(f)(h,h) \geqslant 2\|h\|^2$ donc J e un minimum local en $\frac{g}{2}$.
- $E = \{u \in C^2, u(0) = u(1) = 0\}$, $J(u) = \int_0^1 (u'(x)) - fu$.
  Si J est minimal en u alors $DJ(u)(h) = 0$ donc on calcule et on trouve pour tout $h \in E$,
  $$\int_0^1 (f - 2u'')h = 0$$
  Donc (on admet que) $f - 2u'' = 0$. Donc $u'' = \frac{f}{2}$.

5.2 Extrema liés

On cherche un minimum sur une surface d'équation $g(x) = 0$.

<u>Théorème 5.2</u> *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f et g C^1 et $a \in U$ tel que $g(a) = 0$, $f(a) = \min_{g(x)=0} f(x)$ et $Dg(a) \neq 0$.*

On a alors l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Df(a) = \lambda Dg(a)$.

Démonstration. $Dg(a) \neq 0$ donc $\overrightarrow{\text{grad}}\, g(a) \neq 0$ donc il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\frac{\partial g}{\partial x_i}(a) \neq 0$ et OPS $i = n$.

Par le TFI, il existe un voisinage U de $(a_1, \cdots, a_{n-1})$ et V de a_n ainsi que $\varphi : U \to V$ C^1 tel que $g((x_1, \cdots, x_{n-1}), x_n) = 0$ ssi $x_n = \varphi(x_1, \cdots, x_{n-1})$.

Pour tout y, on note $y' = (y_1, \cdots, y_{n-1})$.

On a $f(x) = f(x', x_n) = f(x', \varphi(x'))$ si $g(x) = 0$ et $(x', x_n) \in U \times V$.

Comme f est différentiable en a alors $f(x', \varphi(x'))$ l'est en a' et sa différentielle par rapport à x' est nulle en a'. D'où :

$$D_{x'}f(a', \varphi(a')) + D_{x_n}f(a', \varphi(a'))D_{x'}\varphi(a') = 0$$

Donc, pour tout i,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(a) = 0$$

Or, en différentiant $g(x', \varphi(x')) = 0$ pour $i < n$, on obtient :

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x', \varphi(x')) + \frac{\partial g}{\partial x_n}(x', \varphi(x'))\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x') = 0$$

Donc en réinjectant,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) - \frac{\partial g}{\partial x_i}(a)\left(\frac{\partial g}{\partial x_n}(a)\right)^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$$

On pose $\lambda = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(\frac{\partial g}{\partial x_n}(a))^{-1} \neq 0$.

On a alors pour $i < n$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}(a)$. Et pour $i = n$, c'est débile par définition de λ. ■

Remarque 5.3

- *λ s'appelle multiplicateur de Lagrange.*
- *f différentiable en a suffit.*
- *Plus généralement, si f et g sont C^1 et si $a \in U$ vérifie $g(a) = 0$, $Dg(a)$ surjective et $f(a) = \min_{g(x)=0} f(x)$, alors il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ tel que $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{\text{grad}}\, g_i(a)$.*

Exemple 5.2

- On minimise x sur $\mathbb{S}^2$.
  $f = (x, y, z) \mapsto x$ et $g = (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1$.
  Si (x_0, y_0, z_0) est extrémal, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que :
  $$\begin{cases} 1 & = 2\lambda x \\ 0 & = 2\lambda y \\ 0 & = 2\lambda z \end{cases}$$
  Donc, comme $\lambda \neq 0$, $y = z = 0$ et $x = \pm 1$.
  Or $1 > -1$ donc $(-1, 0, 0)$ est solution. On vérifie que -1 est bien le min.
- Soit $u \in L(\mathbb{R}^n)$ symétrique et $f = \langle u, \cdot \rangle$.
  On minimise f pour $\|x\|^2 = 1$.
  Il existe x_0 tel que $f(x_0) = \min_{\|x\|^2=1} f(x)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0) = \lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, g(x_0)$.
  On a $Df(x_0) = 2u(x_0)$ donc $u(x_0) = \lambda x_0$.

Chapitre 6

Sous variétés différentiables de $\mathbb{R}^n$

6.1 Introduction : courbes et surfaces

6.1.1 Courbes dans $\mathbb{R}^2$ (C^1)

Il y a trois types :

- Les graphes $\{(x, f(x)), x \in I\}$ avec $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ C^1.
- Les équations cartésiennes : $\{(x, y) \in U, g(x, y) = 0\}$ avec $g : U \to \mathbb{R}$ et $U \subset \mathbb{R}^2$.

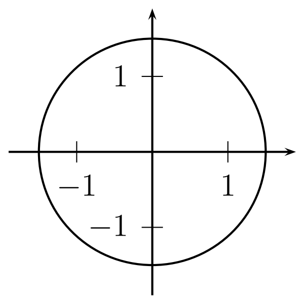


FIGURE 6.1 – $x^2 + y^2 = 2.25$

Graphe $\Rightarrow$ équation cartésienne : $g(x, y) = y - f(x)$.

- Les courbes paramétrées : $\{(x(t), y(t)), t \in I\}$ avec $I \subset \mathbb{R}$ et $x, y : I \to \mathbb{R}$ C^1.

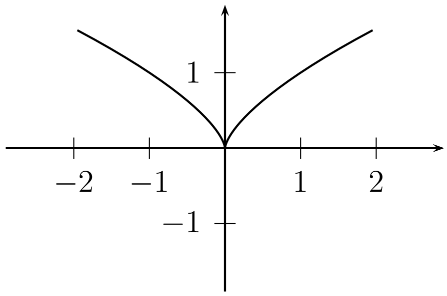


FIGURE 6.2 – $x(t) = t^3$, $y(t) = t^2$

Graphe $\Rightarrow$ équation paramétrique : $x(t) = t$, $y(t) = f(t)$.

Les réciproques sont fausses globalement, mais localement, avec des hypothèses supplémentaires, on a l'équivalence.

THÉORÈME 6.1 (ÉQUATION CARTÉSIENNE $\Rightarrow$ GRAPHE LOCALEMENT) *Si $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ ou $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$, (ssi $Dg(x_0, y_0) \neq 0$), alors il existe un voisinage de (x_0, y_0) et f C^1 tel que pour tout $x, y \in U$, $g(x, y) = 0 \quad \text{ssi} \quad y = f(x)$.*

Démonstration. TFI ∎

THÉORÈME 6.2 (ÉQUATION PARAMÉTRÉE $\Rightarrow$ GRAPHE LOCALEMENT) *Si $(x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0, 0)$ et $t \mapsto (x(t), y(t))$ injective, alors il existe un voisinage I de t_0 tel qu'il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ C^1 tel que la courbe soit le graphe de $f(x) = y(\varphi(x))$.*

Démonstration. OPS $x'(t_0) \neq 0$.

On applique le TIL en t_0 à x. On a alors $t = \varphi(x)$. D'où le résultat. ∎

Définition 6.1 (Sous variété C^1 de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$) $X \subset \mathbb{R}^2$ est une sous-variété de dimension 1 ssi pour tout $a \in X$, il existe $U \subset \mathbb{R}^2$ voisinage de a, $V \subset \mathbb{R}^2$ un voisinage de 0 et $\varphi : V \to U$ un C^1-difféomorphisme tel que $\varphi(0) = a$ et $\varphi(V \cap (\mathbb{R} \times \{0\})) = X \cap U$.

Remarque 6.1 Cela implique qu'il n'y a pas de point double.

6.1.2 Surfaces dans $\mathbb{R}^3$

On a aussi trois types de définition : les graphes, les équations et les nappes paramétrées.

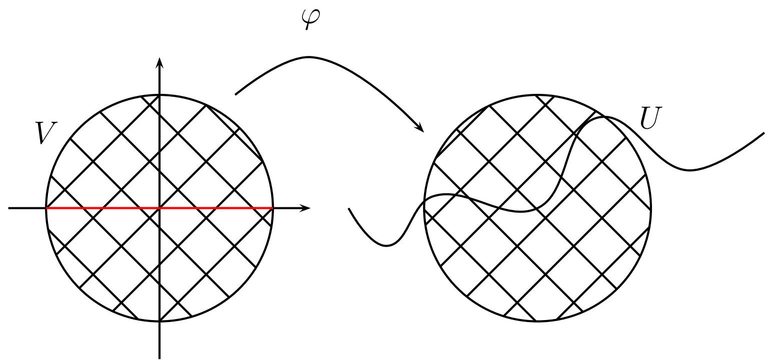


FIGURE 6.3 – Sous variété et difféomorphisme

6.2 Sous-variétés C^k de dimension d de $\mathbb{R}^n$

Définition 6.2 Soit $\varnothing \neq X \subset \mathbb{R}^n$.

X est une sous-variété C^k de dimension d de $\mathbb{R}^n$ ssi pour tout $a \in X$, il existe $U \subset \mathbb{R}^n$ voisinage de a, $V \subset \mathbb{R}^n$ voisinage de 0 et $\varphi : V \to U$ un C^k-difféomorphisme tel que $\varphi(0) = a$ et $\varphi(V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d})) = X \cap U$.

« X ressemble localement à un espace vectoriel de dimension d dans $\mathbb{R}^n$ ».

Remarque 6.2 *On a $k \geqslant 1$ et on aura généralement $k = +\infty$. On dit alors « lisse ».*

Exemple 6.1

- Tout espace affine de dimension d est une sous-variété de dimension d.
- Si $d = 0$, X est un point.
- Si $d = 1$, ce sont les courbes lisses
- Si $d = 2$, ce sont les surfaces sympathiques
- Si $d = n - 1$, ce sont les hypersurfaces

THÉORÈME 6.3 *Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ non vide. Il y a équivalence entre :*

1. *X est une sous-variété C^1 de dimension d de $\mathbb{R}^n$*
2. *Pour tout $a \in X$, il existe un système de coordonnées de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$, il existe $U \subset \mathbb{R}^n$ voisinage de a, $V \subset \mathbb{R}^d$ voisinage de a et $f : V \to \mathbb{R}^{n-d}$ C^1 tel que $f(a_1) = a_2$ et $X \cap U = \{(x, f(x)), x \in V\}$ avec $a = (a_1, a_2)$.*
3. *Pour tout $a \in X$, il existe $U \subset \mathbb{R}^n$ voisinage de a, $V \subset \mathbb{R}^{n-d}$ voisinage de 0 et $g : U \to V$ C^1 tel que $X \cap U = g^{-1}(\{0\})$ et $Dg(a)$ surjective.*
4. *Pour tout $a \in X$, il existe $U \subset \mathbb{R}^n$ voisinage de a, $V \subset \mathbb{R}^d$ voisinage de 0 et $\Theta : V \to \mathbb{R}^n$ C^1 tel que $\Theta(0) = a$, $\Theta(V) = X \cap U$, $D\Theta$ injective et $\Theta : V \to X \cap U$ est un homéomorphisme.*

Remarque 6.3 À retenir : 2. image réciproque de 0 *par une submersion (ie différentielle surjective) et 3. image d'une immersion (ie différentielle injective).*

6.3 Espaces tangents

Définition 6.3 Soit X une sous variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$, $a \in X$.

L'espace tangent en a à X est :

$$T_aX = \{v \in \mathbb{R}^n, \exists \gamma :]-1,1[\to X \quad C^1, \gamma(0) = a, \gamma'(0) = v\}$$

Proposition 6.1 $T_aX = D\varphi(0)(\mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d})$ avec φ le difféomorphisme $V \to U$.

Démonstration. Une courbe tracée sur X peut s'écrire $\gamma = \varphi \circ \widetilde{\gamma}$ avec $\widetilde{\gamma}$ une courbe tracée sur $\mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d}$.

On a $\underbrace{\gamma'(t_0)}_{\in T_aX} = D\varphi(0)(\underbrace{\widetilde{\gamma}'(t_0)}_{\in \mathbb{R}^d})$. ■

Corollaire 6.1 *T_aX est un espace vectoriel de dimension d.*

Proposition 6.2 Pour les définitions équivalentes,

- $T_aX = Df(a_1)(\mathbb{R}^d) = \mathrm{Im}(Df(a_1))$
- $T_aX = Dg(a)^{-1}(0) = \mathrm{Ker}(Dg(a))$
- $T_aX = D\Theta(0)(\mathbb{R}^d) = \mathrm{Im}(D\Theta(0))$.

Exemple 6.2 Plan tangent à la sphère $\mathbb{S}^2$. On a $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{S}^2$. On a $Dg(a,b,c) = (2a, 2b, 2c)$.

Donc l'équation du plan tangent est $2ax+2by+2cz = 0$ ie $ax+by+cz = 0$.

Deuxième partie

Fonctions holomorphes

Chapitre 7

Premières propriétés

On se place sur Ω un ouvert connexe.

7.1 Définition

Définition 7.1 Soit $z_0 \in \Omega$.
f est holomorphe en z_0 ssi $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ admet une limite pour $z \to z_0$.
On note alors $f'(z_0)$ cette limite.

Définition 7.2 f est holomorphe sur $A \subset \Omega$ ssi f est holomorphe en tout point de A.

Exemple 7.1

- $f(z) = z^n$, $\Omega = \mathbb{C}$.

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-k-1} \to n z_0^{n-1}$$

- $f(z) = \frac{1}{z}$ sur $\mathbb{C}^*$.

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = -\frac{z}{z_0} \to -\frac{1}{z_0^2}$$

- $f(z) = \overline{z}$ n'est pas holomorphe : si $z = z_0 + e\mathrm{e}^{i\theta}$,

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \mathrm{e}^{-2i\theta}$$

qui n'a pas de limite quand $z \to z_0$.
- Idem pour $\Re$, $\Im$

Proposition 7.1 L'ensemble des fonctions holomorphes muni de $+$, $\times$ et $\cdot$ est une algèbre et on a les formules usuelles pour la dérivée de la somme et des produits.

Démonstration. On montre celle pour le produit : soit f, g holomorphes et $z_0 \in \Omega$.

$$\begin{aligned}\frac{fg(z) - fg(z_0)}{z - z_0} &= \frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} \\ &= f(z)\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} + g(z_0)\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\end{aligned}$$

Remarque 7.1 Si f est holomorphe, f est continue.

Proposition 7.2 Si f est holomorphe en z_0 et $f(z_0) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ est holomorphe en z_0 et :

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{f(z_0)^2}$$

Remarque 7.2 exp *est holomorphe par permutation somme-limite.*

7.2 Séries entières

Définition 7.3 On appelle rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ le réel :

$$\begin{aligned}R &= \sup\left\{|z|, \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ converge}\right\} \\ &= \sup\{|z|, a_n z^n \text{ borné}\} \\ &= \sup\left\{r > 0, \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \text{ converge}\right\} \\ &= \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}}\end{aligned}$$

Démonstration.

- $R_3 \leqslant R_1 \leqslant R_2$.
- Soit $\varepsilon > 0$ et z_0 tel que $a_n z_0^n$ borné et $|z_0| \geqslant R_2 - \varepsilon$.
  On a $|a_n| r^n \leqslant |a_n||z_0|^n |\frac{r}{z_0}|^n \leqslant M|\frac{r}{z_0}|^n$ qui est TG de série convergente.
  Donc $R_3 \geqslant R_2 - 2\varepsilon$. D'où $R_1 = R_2 = R_3$.
- $R_4 = \liminf_n \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

  Soit $\varepsilon > 0$. Pour n suffisamment grand, $\sqrt[n]{|a_n|} \geqslant R_4 - \varepsilon$.

Donc $|a_n|r^n \leqslant (\frac{r}{R_4-\varepsilon})^n$ donc converge pour $r < R_4-\varepsilon$ donc $R_3 \geqslant R_4-\varepsilon$ donc $R_3 \geqslant R_4$.

On fait pareil avec un $+\varepsilon$ et on a $R_3 \leqslant R_4 + \varepsilon$. ∎

Proposition 7.3 Il y a convergence uniforme sur tout disque fermé inclus dans $D(0, R)$.

Proposition 7.4 Toute série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon non nul est holomorphe sur $D(0, R)$.

De plus $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.

Proposition 7.5

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{l=0}^{n-1} z^l z_0^{n-1-l}$$

Si $R' < R$ et $|z_0| < R'$, $|z| < R'$, alors

$$|a_n| \left| \sum_{l=0}^{n-1} z^l z_0 n - 1 - l \right| \leqslant n|a_n|R'^{n-1}$$

On sait que $n|a_n|R'^{n-1}$ converge car $\limsup_n \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$.

On conclut par convergence dominée.

7.3 Conditions de Cauchy-Riemann

Proposition 7.6 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ peut être vue comme $\Omega \to \mathbb{R}^2$.

Si f est holomorphe alors elle est différentiable.

Démonstration. Si f est holomorphe en z_0 alors $f(z) = f(z_0)+(z-z_0)f'(z_0)+o(z)$ pour $z \to z_0$.

Si $f = F + iG$, $z = x + iy$ et $f'(z_0) = A + iB$ alors :

$$F(x + iy) + iG(x + iy) = F(x_0 + iy_0) + iG(x_0 + iy_0) + (x - x_0)A$$
$$- (y - y_0)B + i((x - x_0)B + (y - y_0)A) + o(z)$$

Donc F et G sont différentiables et $\frac{\partial F}{\partial x} = A = \frac{\partial G}{\partial y}$ et $\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial G}{\partial x} = -B$. ∎

Proposition 7.7 Réciproquement, si f est différentiable et si $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial y}$ et $\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial G}{\partial x}$ alors f est holomorphe. (Ce sont les conditions de Cauchy-Riemann)

COROLLAIRE 7.1 *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe sur Ω et $f'(z) = 0$ pour $z \in \Omega$ alors, comme Ω est connexe, f est constante.*

Proposition 7.8 On peut appliquer tous les résultats de calcul différentiel.

Remarque 7.3

- *Si F et G sont différentiables, alors $\Delta F = \Delta G = 0$. On dit alors que F et G sont harmoniques.*
- *Les conditions de Cauchy-Riemann sont équivalentes à $\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.*
- *On a $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$. En changeant de base ($\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}\overline{z} = \mathrm{d}x - i\mathrm{d}y$), on a :*

$$\mathrm{d}f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}\overline{z}$$

  On note $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ et $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$.
  Les conditions s'écrivent alors $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.

7.4 Intégration sur des chemins

Définition 7.4 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ est un chemin ssi γ est continue et il existe $t_0, \cdots, t_n$ tel que $a = t_0 < \cdots < t_n = b$ et $\forall i \in [\![0, n-1]\!], \gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$ est C^1.

γ est fermé ssi $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Définition 7.5 Soit f continue et γ un chemin.

On définit :

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

Proposition 7.9 Soit f continue et γ un chemin.

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))| l(\gamma)$$

avec $l(\gamma)$ sa longueur.

Proposition 7.10 Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ et $\widetilde{\gamma} : [b, c] \to \mathbb{C}$.

Si $\gamma(b) = \widetilde{\gamma}(b)$ alors la concaténation $\overline{\gamma}$ de γ et $\widetilde{\gamma}$ est un chemin et :

$$\int_{\overline{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\widetilde{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z$$

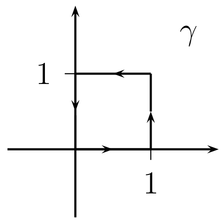
Proposition 7.11 Soit $\gamma : [a, b] \to \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ C^1, bijective, d'inverse C^1.

Alors $\gamma \circ \varphi$ est un chemin et :

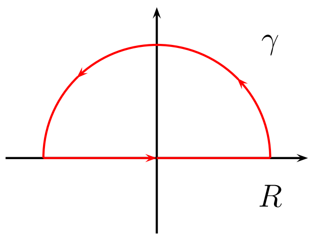
$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{Sgn}(\varphi') \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

Démonstration. Théorème de changement de variable. ■

On définira les chemins par des dessins :



$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + i\int_0^1 f(1+it)\,\mathrm{d}t + \int_1^0 f(t+i)\,\mathrm{d}t + i\int_1^0 f(ti)\,\mathrm{d}t$$



$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^R f(t)\,\mathrm{d}t + iR\int_0^\pi f(Re^{i\theta})e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Définition 7.6 On appelle indice de $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$ par rapport à γ (fermé) et on note $I_\gamma(z)$ le nombre :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - z}$$

Théorème 7.1 *Soit γ fermé et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$.*

Alors $I_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$ et I_γ est constant sur les composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$ et nul sur celle non bornée.

Démonstration.

- $\mathrm{Im}(\gamma)$ est compact donc il existe $R > 0$ tel que $D(0,R)^c \subset \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$.
  On n'a donc qu'une seule composante connexe non bornée.
  $\varphi(t) = \exp\left(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\,\mathrm{d}s\right)$ et φ est C^0 et C^1 par morceaux.
  On a donc $\varphi'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\varphi(t)$ sur $]t_i, t_{i+1}[$.
  Donc $\left(\frac{\varphi}{\gamma-z}\right)' = \frac{\varphi'(\gamma-z)-\varphi\gamma'}{(\gamma-z)^2} = 0$.

$\frac{\varphi}{\gamma - z}$ est constante par morceaux et continue donc constante sur $[a, b]$.
On a donc $\frac{\varphi(a)}{\gamma(a)-z} = \frac{\varphi(b)}{\gamma(b)-z}$.
D'où $\varphi(a) = \varphi(b) = 1$.
Donc $\exp\left(\int_a^b \frac{\varphi'(s)}{\gamma(s) - z}\,\mathrm{d}s\right) = 1$ donc $\in 2i\pi\mathbb{Z}$.

- Si $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$ qui est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$.
Pour tout $z \in D(z_0, \frac{r}{2})$, $|\gamma(t) - z| \geqslant \frac{r}{2}$ donc $|\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}| \leqslant \frac{2|\gamma'(t)|}{r}$.
Donc I_γ est continue sur $D(z_0, r)$ donc sur $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$ donc constante sur chaque composante connexe.
- Si $|z| > R$ avec R tel que $\mathrm{Im}(\gamma) \subset D(0, R)$ alors $\frac{1}{|\gamma(t)-z|} \leqslant \frac{1}{|z|-R}$.
Donc $|I_\gamma(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{|z| - R}\,\mathrm{d}t \to 0$ pour $|z| \to +\infty$. ■

Exemple 7.2 γ_1 le cercle $C(a, r)$ dans le sens trigonométrique, γ_2 icelui parcouru deux fois et γ_3 parcouru dans le sens inverse.

On a : $I_{\gamma_1}(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{ri\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta}{a + r\mathrm{e}^{i\theta} - z} = 0$.
Si $z \notin \overline{D(a, r)}$, $z \in D(a, r)$ et :

$$I_{\gamma_1}(z) = I_{\gamma_1}(a) = \int_0^{2\pi} \frac{ri\mathrm{e}^{i\theta}}{r\mathrm{e}^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta = 1$$

Donc $I_{\gamma_2} = 2I_{\gamma_1}$ et $I_{\gamma_3} = -I_{\gamma_1}$.

Définition 7.7 (Homotopie) Soient γ_1, γ_2 chemins fermés dans Ω indexés par $[0, 1]$. γ_1, γ_2 sont homotopes dans Ω ssi $\exists H : [0, 1] \times [0, 1] \to \Omega$ continue telle que :

- $H(t, 0) = \gamma_0(t), t \in [0, 1]$
- $H(t, 1) = \gamma_1(t), t \in [0, 1]$
- $H(0, s) = H(1, s), s \in [0, 1]$

Remarque 7.4 $s \in]0, 1[$ $t \mapsto H(t, s)$ *est une courbe fermée mais pas nécessairement* C^1 *par morceaux.*

Définition 7.8 Ω ouvert connexe est simplement connexe si tous les chemins fermés sont homotopes à un point.

Proposition 7.12 Tout convexe est simplement connexe. En particulier, $\mathbb{C}$ est simplement connexe.

Théorème 7.2 *Soit Ω un ouvert connexe et γ_1, γ_2 fermés dans Ω homotopes.*

Si $\alpha \notin \Omega$, alors $I_{\gamma_0}(\alpha) = I_{\gamma_1}(\alpha)$.

Démonstration. On suppose en plus que $t \mapsto H(t,s)$ est fermé pour tout s.

Lemme 7.2.1
Soient γ_0 et γ_1 est chemins fermés et $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\gamma_0(t)-\gamma_1(t)| < |\alpha-\gamma_0(t)|$.
Alors $I_{\gamma_0}(\alpha) = I_{\gamma_1}(\alpha)$.

Démonstration. Soit $\alpha \notin \mathrm{Im}(\gamma_0) \cup \mathrm{Im}(\gamma_1)$.
Soit γ le chemin :

$$\gamma(t) = \frac{\gamma_1(t)-\alpha}{\gamma_0(t)-\gamma}$$

On a :

$$|\gamma(t)-1| = \left|\frac{\gamma_1(t)-\gamma_0(t)}{\gamma_0(t)-\alpha}\right| < 1$$

Donc 0 appartient à la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$.
Donc $I_\gamma(0) = 0$ et $I_\gamma(0) = I_{\gamma_0}(\alpha) - I_{\gamma_1}(\alpha)$.
D'où le résultat. ∎

Nécessairement, $\alpha \notin \mathrm{Im}(\gamma_0)$.
Si $\delta = d(\alpha, \mathrm{Im}(\gamma_0)) > 0$, le lemme implique $|\gamma_0 - \gamma_1| < \delta$ donc $I_{\gamma_0}(\alpha) = I_{\gamma_1}(\alpha)$.
L'indice est donc continu par rapport au chemin.
On a $d(\alpha, \mathrm{Im}(H)) = \delta > 0$ et H est uniformément continue sur $[0,1]^2$.
Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $(t,s),(t',s')$ tel que $|t-t'| < \eta$ et $|s-s'| < \eta$, alors $|H(t,s) - H(t',s')| < \frac{\varepsilon}{4}$.
On pose $s_0 = 0$, $s_1 = \frac{\eta}{2} \cdots, s_{n-1} n\frac{\eta}{2}$ et $s_n = 1$ avec $n = \lfloor \frac{2}{n} + 1 \rfloor$.
On pose $\widetilde{\gamma_i} = H(\cdot, s_i)$.
Pour tout i, $\widetilde{\gamma_i}$ est un chemin fermé, $\widetilde{\gamma_0} = \gamma_0$ et $\widetilde{\gamma_n} = \gamma_1$.
De plus, pour tout i, t,

$$|\widetilde{\gamma_i}(t) - \widetilde{\gamma_{i+1}}(t)| < \frac{\delta}{4} < |\alpha - \widetilde{\gamma_i}(t)|$$

Par le lemme 7.2.1, $I_{\widetilde{\gamma_i}}(\alpha) = I_{\widetilde{\gamma_{i+1}}}(\alpha)$. D'où le résultat. ∎

Proposition 7.13 Soit γ un chemin fermé dans Ω un ouvert connexe, f et $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ continue.
Alors :

$$F : \begin{cases} \Omega & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\varphi(\xi)-z}\,\mathrm{d}\xi \end{cases}$$

est développable en série entière en tout $z \in \mathbb{C} \setminus \varphi(\mathrm{Im}(\gamma))$.

Démonstration. Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \varphi(\mathrm{Im}(\gamma))$.

On a $d(z_0, \varphi(\mathrm{Im}(\gamma)) > 0$.

On prendra $r < r_0 < d(z_0, \varphi(\mathrm{Im}(\gamma))$ tel que

$$D(z_0, r) \subset D(z_0, r_0) \subset \mathbb{C} \setminus \varphi(\mathrm{Im}(\gamma))$$

Soit $z \in D(z_0, r)$. On a :

$$\left| \frac{z - z_0}{\varphi(\xi) - z_0} \right| < \frac{r}{r_0} < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\varphi(\xi) - z_0} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\varphi(\xi) - z_0}} = \frac{\varphi(\xi) - z_0}{\varphi(\xi) - z}$$

et la convergence est uniforme en $(\xi, z) \in \mathrm{Im}(\gamma) \times D(z, r)$.

Donc :

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\varphi(\xi) - z} \,\mathrm{d}z &= \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\varphi(\xi) - z_0} \frac{\varphi(\xi) - z_0}{\varphi(\xi) - z} \,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\varphi(\xi) - z_0} \left(\frac{z - z_0}{\varphi(\xi) - z_0} \right)^n \mathrm{d}\xi \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\varphi(\xi) - z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}\xi (z - z_0)^n
\end{aligned}$$

Chapitre 8

Théorème de Cauchy et conséquences

8.1 Le cas convexe

Soit Ω un ouvert convexe.

<u>Théorème 8.1</u> *Soit γ un chemin fermé, $p \in \Omega$, $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{p\})$ continue sur Ω.*

Alors $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

Proposition 8.1 Soit $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ et Ω connexe.

Si F' est continue sur Ω et γ un chemin fermé dans Ω.

Alors $\int_\gamma F'(z)\,\mathrm{d}z = 0$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\int_\gamma F'(z)\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (F\circ\gamma)'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) \\ &= 0\end{aligned}$$

∎

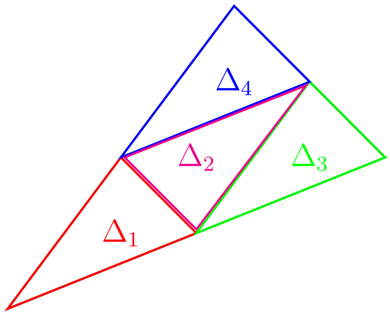
Exemple 8.1 Soit γ un chemin fermé et :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}\right)'$$

On a bien : $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

Démonstration du théorème 8.1.

- Par l'absurde, si $I = \int_\Delta f(z)\,\mathrm{d}z \neq 0$ avec Δ le contour d'un triangle
  On coupe le triangle en 4 lacets :



  avec Δ_1, Δ_3 et Δ_4 orientés comme Δ et Δ_2 dans le sens contraire. et on a :

$$|I| \leqslant \sum_{i=1}^{4} \left| \int_{\Delta_i} f(z)\,\mathrm{d}z \right)$$

  Or , il existe $i_0 \in [\![1,4]\!]$ tel que :

$$\left| \int_{\Delta_{i_0}} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \geqslant \frac{|I|}{4}$$

  On pose $\Delta^1 = \Delta_{i_0}$. On a $l(\Delta^1) = \frac{l(\Delta)}{2}$.
  Par récurrence, on construit une suite Δ^n de triangles tels que :

$$\left| \int_{\Delta^n} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \geqslant \frac{|I|}{4^n}$$

  et $l(\Delta^n) = \frac{l(\Delta)}{2^n}$.
  On a $\bigcap\limits_{n\geqslant 1} \overline{\Delta^n} \neq \varnothing$ donc il existe z_0 dedans.
  f est holomorphe en z_0 et :

$$\int_{\Delta^n} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Delta^n} f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + o(z-z_0)\,\mathrm{d}z = \int_{\Delta^n} o(z-z_0)\,\mathrm{d}z$$

  D'où :

$$\begin{aligned}
\frac{|I|}{4^n} &\leqslant \left| \int_{\Delta^n} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \\
&\leqslant l(\Delta^n) \max_{z\in\Delta^n}((z-z_0)\varepsilon(z-z_0)) \\
&\leqslant l(\Delta^n)^2 \max_{z\in\Delta^n} |\varepsilon(z-z_0)| \\
&\leqslant \frac{1}{4^n} l(\Delta)^2 \max_{z\in\Delta^n} |\varepsilon(z-z_0)|
\end{aligned}$$

Donc $|I|$ est plus petit qu'un truc qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$.
Donc $|I| = 0$.

- Si P est un sommet de Δ,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z\right| &= \left|\sum_{i=0}^{2}\int_{\Delta_\varepsilon^i} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \\ &= \left|\int_{\Delta_\varepsilon^0} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \text{ par 1} \\ &\leqslant l(\Delta_\varepsilon^0)\max_{z\in\Delta}|f(z)| \\ &\leqslant 4\varepsilon\max_{z\in\Delta}|f(z)|\end{aligned}$$

Pour $\varepsilon \to 0$, on a le résultat.
Si P est une arête de Δ, ça marche aussi (on coupe en deux triangles), de même s'il est à l'intérieur (en trois triangles) ou si le triangle est plat (trivial).

- On fixe $z_0 \in \Omega$ en on pose $F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$.
On a $F(z) - F(z') = \int_{[z_0,z]} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \int_{[z_0,z']} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$.
Sur Δ le triangle (z_0, z, z') on a :

$$\int_{[z_0,z]} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_{[z,z']} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_{[z',z_0]} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0$$

Donc $F(z) - F(z') = \int_{[z',z]} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$.
En divisant par $z - z'$, on a :

$$\frac{F(z) - F(z')}{z - z'} - f'(z) = \frac{1}{z - z'}\int_{[z',z]} f(\xi) - f(z)\,\mathrm{d}\xi$$

f est continue en z donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $|\xi - z| \leqslant \eta$, $|f(\xi) - f(z)| \leqslant \varepsilon$.
Si $|z' - z| \leqslant \eta$, on a alors :

$$\left|\frac{F(z) - F(z')}{z - z'} - f'(z)\right| \leqslant \frac{1}{|z - z'|}\left|\int_{[z',z]} f(\xi) - f(z)\,\mathrm{d}\xi\right| \leqslant \varepsilon$$

Donc F est holomorphe en z et $F'(z) = f(z)$ sur Ω. ■

<u>Théorème 8.2</u> *Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{C}$, γ un chemin fermé dans Ω et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

Soit $z \in \Omega$, $z \notin \mathrm{Im}(\gamma)$.

$$I_\gamma(z)f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi$$

Corollaire 8.1 *Si $I_{\gamma_1} = I_{\gamma_2}$ alors :*

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi = \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi$$

Démonstration. On pose :

$$g : \begin{cases} \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z} & \text{si } \xi \neq z \\ f'(z) & \text{sinon} \end{cases}$$

$g \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z\})$ et g continue sur Ω donc :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\gamma g(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ &= \int_\gamma \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi \\ &= \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} - 2i\pi I_\gamma(z)f(z) \end{aligned}$$

■

Corollaire 8.2 *Soit Ω un ouvert connexe.*
- *$f \in \mathcal{H}(\Omega)$ alors f est développable en série entière en tout point de Ω.*
- *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ alors $f' \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

Démonstration. Pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que $D(z_0, 2r) \subset \Omega$.

$C(z, r)$ (sens trigo, parcouru une fois) est un chemin dans $D(z_0, 2r)$.

On a $I_{C(z,r)}(z) = 1$ pour tout $z \in D(z_0, r)$ donc :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(z,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi$$

qui est DSE en tout $z \in D(z_0, r)$. ■

<u>Théorème 8.3</u> de Morera *Soit Ω un ouvert connexe, f continue sur Ω.*

Si, pour tout triangle Δ inclus dans Ω,

$$\int_\Delta f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

alors $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$. Il existe $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset \Omega$.

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

Par le théorème de Cauchy, F est holomorphe et $F' = f$ donc $f \in \mathcal{H}(D(z_0, r))$.

Comme c'est vrai en tout z_0, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. ■

<u>Théorème 8.4</u> *Soit Ω un ouvert connexe, $(f_n)_n$ une suite dans $\mathcal{H}(\Omega)$ et f telle que pour tout compact $K \subset \Omega$, f_n cvu vers f sur K.*

Alors $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Démonstration. f est continue sur tout compact $K \subset \Omega$ donc f est continue sur K.

Soit Δ un triangle inclus dans Ω.

Pour $2\varepsilon = d(\Delta, \Omega^c) > 0$, on note $O_\varepsilon = \{z \in \Omega, d(z, \Delta) < \varepsilon\}$.

Par théorème de Cauchy, $\displaystyle\int_\Delta f_n(z)\,\mathrm{d}z = 0$ sur O_ε.

f_n cvu vers f sur O_ε donc en permutant limite et intégrale, $\displaystyle\int_\Delta f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

Donc f est holomorphe sur Ω par le théorème de Morera. ■

8.2 Le logarithme

<u>Définition 8.1</u> On a $\mathrm{e}^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Proposition 8.2

- $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$
- $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$
- $\mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^x(\cos(y) + i\sin(y))$
- $\mathrm{e}^{z+2ik\pi} = \mathrm{e}^z$
- exp est surjective dans $\mathbb{C}^*$.

<u>Théorème 8.5</u> *On peut définir un inverse* $\ln(z) = \ln(r) + i\theta$ *avec* $\theta \in]-\pi, \pi[$ *et* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Proposition 8.3 ln est holomorphe et sa dérivée est la fonction inverse.

Démonstration. On montre la continuité en passant en polaires.

De plus, si $a = \ln(z)$, $\ln(z+h) = a + k$ avec $k \to 0$ quand $h \to 0$.

On a $z + h = \mathrm{e}^{a+k}$ donc :

$$\frac{\ln(z+h) - \ln(z)}{h} = \frac{k}{\mathrm{e}^{a+k} - \mathrm{e}^a} \to \frac{1}{\mathrm{e}^a} = \frac{1}{z}$$ ■

Remarque 8.1 ln *ne se prolonge pas à* $\mathbb{C}$.

Définition 8.2 Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$.

$L \in \mathcal{H}(\Omega)$ est une détermination du logarithme ssi $\mathrm{e}^{L(z)} = z$ pour tout $z \in \Omega$.

Remarque 8.2

- *Nécessairement* $0 \notin \Omega$.
- $L'(z)\mathrm{e}^{L(z)} = 1$ *donc* $L'(z) = \frac{1}{z}$.
- *Si on a deux déterminations sur un ouvert connexe alors elles diffèrent d'une constante.*

Proposition 8.4 Soit Ω un ouvert convexe.

Il existe une détermination du logarithme ssi pour tout chemin fermé dans Ω,

$$\int_\gamma \frac{1}{\xi}\,\mathrm{d}\xi = 0$$

Démonstration.

$\Rightarrow$ Si L existe et est holomorphe, sa dérivée est holomorphe et, par le théorème de Cauchy,

$$\int_\gamma \frac{1}{\xi}\,\mathrm{d}\xi = 0$$

pour tout chemin fermé.

$\Leftarrow$ Soit $z_0 \in \Omega$ fixé. On pose

$$L(z) = \int_{[z_0,z]} \frac{1}{\xi}\,\mathrm{d}\xi + \lambda$$

Comme dans la preuve du théorème de Cauchy, on a $L \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $L'(z) = \frac{1}{z}$.
On pose $G(z) = z\mathrm{e}^{-L(z)}$.
On a $G'(z) = \mathrm{e}^{-L(z)} - zL'(z)\mathrm{e}^{-L(z)} = 0$.
Donc G est constante sur Ω et $G(z_0) = z_0\mathrm{e}^{-\lambda}$.
On prend λ tel que $\mathrm{e}^{\lambda} = z_0$ (existe par surjectivité de exp)
Alors $G(z) = G(z_0) = 1$ donc $\mathrm{e}^{L(z)} = z$. ■

Remarque 8.3 La proposition est vraie si Ω *est simplement connexe.*

8.3 Théorème des zéros isolés

THÉORÈME 8.6 *Soit* Ω *un ouvert connexe,* f *holomorphe sur* Ω *non nulle.*

Alors $Z = \{z \in \Omega, f(z) = 0\}$ *n'a pas de points d'accumulation et est au plus dénombrable.*

De plus, son intersection avec tout compact est finie.

Remarque 8.4 *Ça ne marche pas dans* $\mathbb{R}$ *avec par exemple* $\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}1_{\{x\geqslant 0\}}$.

Démonstration. Z est fermé et s'écrit $Z_{\text{acc}} \cup Z_{\text{isolé}}$.

f est holomorphe en z_0 donc DSE en z_0. Il existe donc $r > 0$ et $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que :

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$$

pour $z \in D(z_0, r)$.

Si pour tout n, $a_n = 0$, $f = 0$ sur $D(z_0, r)$ donc z_0 n'est pas isolé et $D(z_0, r) \subset Z$.

Sinon, il existe n_0 tel que $a_{n_0} \neq 0$. Il est loisible de la supposer minimale. On écrit alors :

$$f(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = (z-z_0)^{n_0} \underbrace{\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-n_0}}_{g(z)}$$

$g(z_0) = a_{n_0} \neq 0$ donc il existe $r > 0$ tel que $g(z) \neq 0$ sur $D(z_0, r)$.

Alors $f(z) \neq 0$ sur $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ donc z_0 est isolé.

Donc z_0 est isolé ou z_0 est un point d'accumulation et dans ce cas, il existe $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset Z_{acc}$. Z_{acc} est donc ouvert fermé, donc par connexité et non nullité de f, $Z_{acc} = \varnothing$. ∎

COROLLAIRE 8.3 *Soit* Ω *un ouvert connexe,* f, g *holomorphes sur* Ω.

Si f *et* g *coïncident sur un ensemble ayant un point d'accumulation, alors elles sont égales partout.*

Exemple 8.2 L'exponentielle complexe est l'unique prolongement complexe de l'exponentielle réelle.

8.4 Singularités

THÉORÈME 8.7 *Soit* Ω *connexe,* $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$. *Trois cas sont possibles :*

1. *f est bornée sur un voisinage de a donc f est prolongeable en une fonction holomorphe sur Ω. (singularité éliminable)*
2. *Il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $(z-a)^m f(z)$ est bornée alors $(z-a)^m f(z)$ est prolongeable en une fonction holomorphe sur Ω. On dit que f a un pôle d'ordre m en a.*
3. *Pour tout $\varepsilon > 0$, $f(D(a,\varepsilon) \setminus \{a\})$ est dense dans $\mathbb{C}$. (singularité essentielle)*

Démonstration.

1. Si f est bornée en a, alors $g(z) = (z-a)^2 f(z)$ s'annule en a.
   g est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ et continue sur Ω car f est bornée en a.
   De plus,
   $$\frac{g(z)-g(a)}{z-a} = (z-a)f(z) \to 0$$
   Donc $g \in \mathcal{H}(\Omega)$. On a de plus $g(a) = g'(a) = 0$.
   g est DSE en a donc il existe $r > 0$ et $(a_n)_n$ tel que pour tout $z \in D(a,r)$,
   $$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$$
   Donc $g(z) = (z-a)^2 \sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k (z-a)^{k-2}$.
   On a $f(z) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k (z-a)^{k-2}$. Donc f est DSE en a donc holomorphe en a.
2. Si le troisième point n'est pas vrai, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(D(a,\varepsilon) \setminus \{a\})$ n'est pas dense, ie son complémentaire est d'intérieur non vide.
   Il existe donc $b \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ tel que $D(b,r) \subset f(D(a,\varepsilon) \setminus \{a\}$.
   Pour tout $z \in D(a,\varepsilon) \setminus \{a\}$, $f(z) \notin D(b,r)$ donc $|f(z) - b| \geqslant r$.
   On pose $g = \frac{1}{f-b}$ sur $D(a,\varepsilon) \setminus \{a\}$.
   On a g holomorphe sur $D(a,\varepsilon) \setminus \{a\}$ et $|g(z)| \leqslant \frac{1}{z}$ donc g bornée en a donc holomorphe sur $D(a,\varepsilon)$.
   Si $g(a) \neq 0$, $f(z) = b + \frac{1}{g(z)}$ pour $z \in D(a,\varepsilon)$, donc f est holomorphe sur $D(a,\varepsilon)$ et on se retrouve dans le premier cas.
   Si $g(a) = 0$, $f(z) = \frac{bg(z)+1}{g(z)}$ qui est le quotient de deux fonctions holomorphes qui a donc un pôle en a. On se retrouve dans le cas 2.
3. Donc si on n'est pas dans le cas 3, on est dans le cas 1 ou 2. ■

Remarque 8.5 *Dans le cas d'un pôle $g(z) = (z-a)^m f(z)$, g est holomorphe sur Ω et DSE en a.*

On a $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ sur $D(a,r)$.

Donc $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^{n-m} = \sum\limits_{n=-m}^{\infty} \underbrace{a_{n+m}}_{=b_n} (z-a)^n$ (série de Laurent) sur $D(a,r) \setminus \{a\}$.

Définition 8.3 Avec ces hypothèses, $b_{-1} = \mathrm{Res}(f,a)$, résidu de f en a

Exemple 8.3 Soient g, h holomorphes sur Ω et $a \in \Omega$, $m \in \mathbb{N}$ tel que $h'(a) = \cdots = h^{(m-1)}(a) = 0$ et $h^{(m)}(a) \neq 0$.

Alors h est DSE en a et $h(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n(z-a)^n$. $a_m \neq 0$

$f = \frac{g}{h}$ est définie sur $D(a,r) \setminus \{a\}$.

On prend r tel que $\sum_{n=m}^{\infty} a_n(z-a)^{n-m} \neq 0$ sur $D(a,r)$.

De plus, $(z-a)^m f(z) = (z-a)^m \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z)}{\sum_{n=m}^{\infty} a_n(z-a)^{n-m}}$ qui est borné au voisinage de a donc f a un pôle d'ordre m en a.

Remarque 8.6 Dans le cas d'une singularité essentielle, on a en plus, pour tout $\varepsilon > 0$, $f(D(a,\varepsilon) \setminus \{a\}) = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}$ privé d'un point.

Exemple 8.4 $f(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$.

0 est une singularité essentielle puisque $z^n \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ est non borné en 0

Si $b = \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$, on note $b = r\mathrm{e}^{i\theta}$ et on a $z = \frac{\ln(r) - i(\theta + 2k\pi)}{\ln(r)^2 + (\theta+2k\pi)^2}$.

Donc pour tout $b \neq 0$, il existe z tel que $f(z) = b$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $z \in D(0,\varepsilon) \setminus \{0\}$ tel que $f(z) = b$.

8.5 Le théorème des résidus

Définition 8.4 Soit Ω connexe.

f est dite méromorphe sur Ω ssi il existe $A \subset \Omega$ au plus dénombrable sans point d'accumulation tel que f soit holomorphe sur $\Omega \setminus A$ et pour tout $a \in A$, f a un pôle en a.

Exemple 8.5 Soit $g, h \in \mathcal{H}(\Omega)$.

$f = \frac{g}{h}$ est méromorphe sur Ω et les pôles de f sont des zéros de h.

On écrit $h(z) = (z-a)^m \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k$ avec $a_0 \neq 0$, et $g(z) = (z-a)^n \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-a)^k$ avec $b_0 \neq 0$.

Alors on a un pôle de f ssi $m > n$ car si $m \leqslant n$, on a une singularité éliminable.

Proposition 8.5 L'ensemble des fonctions méromorphes est stable par $+$, $\times$ et division.

<u>Théorème 8.8</u> (des résidus dans le cas convexe) *Soit Ω convexe, f méromorphe sur Ω, A l'ensemble de ses pôles et γ un chemin fermé de Ω tel que* $\mathrm{Im}(\gamma) \cap A = \varnothing$.

Alors :

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2i\pi \sum_{a\in A} I_\gamma(a)\,\mathrm{Res}(f,a)$$

Démonstration. Dans le cas $A = \{a\}$, f a un développement en série de Laurent au voisinage de a :

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z-a)^k$$

$f(z) - \sum_{k=-m}^{-1} a_k (z-a)^k$ a une singularité éliminable en a on peut donc la prolonger en une fonction holomorphe.

On intègre sur γ et on a donc :

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \sum_{k=-m}^{-1} \int_\gamma a_k (z-a)^f \,\mathrm{d}z \\ &= a_{-1} \int_\gamma \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z \\ a_{-1} I_\gamma(a) &= 2i\pi\,\mathrm{Res}(f,a) I_\gamma(a)\end{aligned}$$

Dans le cas général, on sait que l'enveloppe convexe de $\mathrm{Im}(\gamma)$ est incluse dans Ω.

Il existe $a_1, \cdots, a_n$ dans cette enveloppe et pour tout $a \in A \backslash \{a_1, \cdots, a_n\}$, a n'appartient pas à ce compact (puisque A n'a pas de points d'accumulation).

On pose $\varepsilon > 0$ la distance entre $A \setminus \{a_1, \cdots, a_n\}$ et l'enveloppe convexe Γ de $\mathrm{Im}(\gamma)$.

On pose $\Omega_\varepsilon = \{z \in \Omega, d(z,\Gamma) < \varepsilon\}$.

Ω_ε est un ouvert convexe de Ω et $\Omega_\varepsilon \cap A = \{a_1, \cdots, a_n\}$

γ est un chemin fermé dans Ω_ε.

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, f a un pôle en a donc il existe m_i et $(a_k^i)_k$ tel que $f(z) = \sum_{k=-m_i}^{\infty} a_k^i (z-a_i)^k$ au voisinage de a.

$f - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=-m_i}^{-1} a_k^i (z-a_i)^k$ a des singularités éliminables en $a_1, \cdots, a_n$ on la prolonge donc en une fonction holomorphe sur Ω_ε.

On intègre et, en permutant somme (finie) et intégrales, on obtient :

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} a_{-1}^i \int_\gamma \frac{1}{z-a_i}\,\mathrm{d}z = 2i\pi \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}(f,a_i) I_\gamma(a_i)$$

Or, si $a \in A \setminus \{a_1, \cdots, a_n\}$, $I_\gamma(a) = 0$ (a appartient à la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$).

Donc on a bien :

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2i\pi \sum_{a\in A} \mathrm{Res}(f,a) I_\gamma(a) \qquad \blacksquare$$

Cas 1 : Si $f = \frac{g}{h}$ avec g, h holomorphes sur Ω ouvert convexe et $g(a) \neq 0$, $h(a) = 0$ et $h'(a) \neq 0$.

Alors $h(z) = (z-a)h_1(z)$ avec h_1 holomorphe sur Ω.

On a $h_1(a) = h'(a) \neq 0$. On écrit :

$$\frac{g(z)}{h(z)} - \frac{g(a)}{(z-a)h'(a)} = \frac{g(z)h'(a) - g(a)h_1(z)}{(z-a)h_1(z)h'(a)}$$

Le numérateur s'annule en a et on a $g(z)h'(a) - g(a)h_1(z) = (z-a)k(z)$ avec k holomorphe sur Ω.

On a donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k = \frac{g(z)}{h(z)} - \frac{g(a)}{(z-a)h'(a)} \in \mathcal{H}(\Omega)$.

On a donc le développement de f en série de Laurent :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k + \frac{g(a)}{(z-a)h'(a)}$$

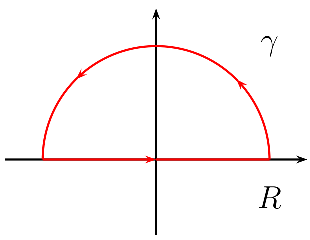
D'où $\mathrm{Res}(f,a) = \frac{g(a)}{h'(a)}$.

Exemple 8.6

- On pose $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. Ses pôles sont $\pm i$.
  On a $g = 1$, $h(z) = 1 + z^2$. $h(i) = 0$, $h'(i) = 2i$.
  Donc $\mathrm{Res}(f,i) = \frac{1}{2i}$.
  De même, $h(-i) = 0$, $h'(-i) = -2i$ donc $\mathrm{Res}(f,-i) = -\frac{1}{2i}$.
  Si on intègre sur le cercle $\gamma = C(0,R)$ avec $R \neq 1$, on a :

  $$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2i\pi\left(\mathrm{Res}(f,i)I_\gamma(i) + \mathrm{Res}(f,-i)I_\gamma(-i)\right)$$

  Donc si $R < 1$, $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.
  On recommence avec $R > 1$ et on trouve $2i\pi(\frac{1}{2i} - \frac{1}{2i}) = 0$.
- Si on intègre sur :



Ladite intégrale vaut $2i\pi(\frac{1}{2i}+0)=\pi$ quand $R>1$.
On peut écrire :

$$\int_\gamma \frac{1}{1+z^2}\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi \frac{iR\mathrm{e}^{i\theta}}{1+R^2\mathrm{e}^{2i\theta}}\,\mathrm{d}\theta$$

On fait tendre R vers $+\infty$: $\displaystyle\int_{-R}^{R}\frac{1}{1+x^2}$ converge facilement vers

$$2\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

On constate que $|\frac{iR\mathrm{e}^{i\theta}}{1+R^2\mathrm{e}^{2i\theta}}| \leqslant \frac{R}{R^2-1}$.
En intégrant, on obtient :

$$\left|\int_0^\pi \frac{iR\mathrm{e}^{i\theta}}{1+R^2\mathrm{e}^{2i\theta}}\,\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \frac{\pi R}{R^2-1} \to 0$$

Donc on en déduit $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

- On prend $f=z\mapsto \frac{\mathrm{e}^{2iz}}{1+z^2}$. Ses pôles sont $\pm i$ et on a $\mathrm{Res}(f,i)=\frac{\mathrm{e}^{-2}}{2i}$ et $\mathrm{Res}(f,-i)=-\frac{\mathrm{e}^{-2}}{2i}$.
Sur le même γ, on a :

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{2iz}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z = 2i\pi\frac{\mathrm{e}^{-2}}{2i} = \pi\mathrm{e}^{-2}$$

Or cette intégrale vaut :

$$\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{e}^{2ix}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi \frac{\mathrm{e}^{2iR\mathrm{e}^{i\theta}}iR\mathrm{e}^{i\theta}}{1+R^2\mathrm{e}^{2i\theta}}\,\mathrm{d}\theta$$

Quand $R\to+\infty$, on a :

$$\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{e}^{2ix}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \to 2\int_0^\infty \frac{\cos(2x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

et :

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{e}^{2iR\mathrm{e}^{i\theta}}iR\mathrm{e}^{i\theta}}{1+R^2\mathrm{e}^{2i\theta}}\,\mathrm{d}\theta \to 0$$

puisque l'intégrande est dominée par $\frac{R\mathrm{e}^{-2R\sin(\theta)}}{R^2-1} \leqslant \frac{R}{R^2-1}$.
Donc $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(2x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-2}$.

Deuxième cas :
$f = \frac{g}{h}$, $g(a) \neq 0$, $h(a) = \cdots = h^{(m-1)}(a) = 0$ et $h^{(m)}(a) \neq 0$.
On a $h(z) = (z-a)^m h_1(z)$ avec h_1 holomorphe. f a un pôle d'ordre m.
h a un DSE de la forme $(z-a)^m \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$.
$h(a+t)$ a un développement limité à tout ordre en 0 de la forme :

$$h(a+t) = t^m \sum_{k=0}^{N} a_k t^k + o(t^{m+N})$$

On a aussi un DL pour g :

$$g(a+t) = \sum_{k=0}^{N} b_k t^k + o(t^N)$$

Donc $t^m \frac{g(a+t)}{h(a+t)}$ admet un DL en 0 qu'on écrit $\sum_{k=0}^{N} c_k t^k + o(t^N)$

Or $(z-a)^m \frac{g(z)}{h(z)}$ a un DSE en a dont les coefficients coïncident avec ceux du DL :

$$(z-a)^m \frac{g(z)}{h(z)} = \sum_{k=0}^{N} c_k (z-a)^k + (z-a)^{N+1} \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{c}_k (z-a)^k$$

Donc $\frac{g(z)}{h(z)} = \sum_{k=0}^{N} c_k (z-a)^{k-m} + (z-a)^{N-m+1} \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{c}_k (z-a)^k$.
On a donc $\mathrm{Res}(f) = c_{m-1}$.

<u>Conclusion</u> : Pour calculer les résidus, on fait un DL à l'ordre $m-1$ de $t^m \frac{g(t)}{h(t)}$ et le résidu est le coefficient de t^{m-1}.

Exemple 8.7 On veut calculer $\int_\gamma \frac{1}{(1+z^2)^2}\,\mathrm{d}z$ avec γ le demi-cercle de rayon R et fermé par un segment réel.

Cette intégrale vaut $2i\pi \operatorname{Res}(\frac{1}{(1+z^2)^2}, i)$. i est un pôle d'ordre 2 et on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1+(t+i)^2)^2} &= \frac{1}{(t^2+2it)^2} \\
&= \frac{1}{t^2(2i+t)^2} \\
&= \frac{1}{-4t^2(1+\frac{t}{2i})^2} \\
&= -\frac{1}{4t^2}\left(1-\frac{t}{i}+o(t)\right) \\
&= -\frac{1}{4t^2}-\frac{i}{4t}+o\left(\frac{1}{t}\right)
\end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Res}(\frac{1}{(1+z^2)^2}, i) = -\frac{i}{4}$.
Donc l'intégrale vaut $\frac{\pi}{2}$.
D'où :

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{(1+x^2)^2} \, \mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \frac{iR\mathrm{e}^{i\theta}}{(1+R^2\mathrm{e}^{2i\theta})^2} \, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}$$

On majore le deuxième terme :

$$\left|\int_0^{\pi} \frac{iR\mathrm{e}^{i\theta}}{(1+R^2\mathrm{e}^{2i\theta})^2} \, \mathrm{d}\theta\right| \leqslant \int_0^{\pi} \frac{R}{(R^2-1)^2} \, \mathrm{d}\theta \to 0$$

Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

Par symétrie :

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

8.6 Principe du maximum

<u>Théorème 8.9</u> *Soit Ω un ouvert connexe et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*
S'il existe $a \in \Omega$ tel que $|f(a)| = \max\limits_{z\in\Omega} |f(z)|$ alors f est constante.

Démonstration. Soit $a \in \Omega$ où f atteint son maximum.
On prend $g(z) = \mathrm{e}^{i\theta} f(z)$ avec θ tel que $\mathrm{e}^{i\theta} f(a) \in \mathbb{R}^+$.
On a $g(a) = \max\limits_{z\in\Omega} |g(z)|$.

Soit $R > 0$ tel que $D(a,R) \subset \Omega$. On prend aussi $r \leqslant R$.

$$\begin{aligned} 1 &= I_{C(a,r)}(a)g(a) \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{C(a,r)} \frac{g(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g(a+r\mathrm{e}^{i\theta})ir\mathrm{e}^{i\theta}}{r\mathrm{e}^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} g(a) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(a+r\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\Re\left(\int_0^{2\pi} g(a+r\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta\right) \\ &\leqslant \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \Re(g(a+r\mathrm{e}^{i\theta}))\,\mathrm{d}\theta \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(a)\,\mathrm{d}\theta = g(a) \end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{\Re(g(a+r\mathrm{e}^{i\theta})) - g(a)}_{\leqslant 0}\,\mathrm{d}\theta = 0$.

Donc $\Re(g(a+r\mathrm{e}^{i\theta})) = g(a)$ pour tout θ, r.

Donc $\Re(g(z)) = g(a)$ sur $D(a,r)$. Donc g est constante sur $D(a,r)$ (par Cauchy-Riemann).

Comme $D(a,r)$ a un point d'accumulation, g est constante sur Ω. ■

Corollaire 8.4 *Si de plus, f est continue sur $\overline{\Omega}$ et Ω borné et f non constante alors pour tout $z \in \Omega$,*

$$|f(z)| < \max_{z\in\partial\Omega} |f(z)|$$

Exemple 8.8 Soient $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ avec Ω connexe tel que $\overline{D}(0,1) \subset \Omega$.

On suppose que $|f(z)| = |g(z)|$ si $z = 1$.

En effet, f et g ne s'annulent pas sur $\overline{D}(0,1)$. $h = \frac{f}{g}$ vérifie les hypothèses du corollaire donc si h n'est pas constante, on a :

$$|h(z)| < \max_{|z|=1} |h(z)| = 1$$

$\frac{g}{f}$ vérifie les mêmes hypothèses et on a donc $|h(z)| > 1$.

Donc on a une contradiction et h est constante sur Ω.

Donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ de module 1 tel que $f = \lambda g$ sur Ω.

<u>THÉORÈME 8.10</u> *Soit Ω un ouvert convexe, γ un chemin fermé de Ω et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$,

$$I_\gamma(z) f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \, \mathrm{d}\xi$$

Démonstration.

– (Première méthode) DSE de $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, \mathrm{d}\xi$.
  Soit $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset \Omega \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$. Soit $z \in D(z_0, r)$.
  Comme z et z_0 sont dans la même composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$, $I_\gamma(z) = I_\gamma(z_0)$.
  On a $(I_\gamma(z))'|_{z=z_0} = 0$. On écrit aussi :

$$\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, \mathrm{d}\xi = \int_a^b \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} \, \mathrm{d}t$$

  On a $\frac{1}{|\gamma(t) - z|} < \frac{2}{r}$.
  On domine donc la dérivée de l'intégrande par $\frac{4}{r^2}|f(\gamma(t))||\gamma'(t)|$. Par convergence dominée, on a donc :

$$I_\gamma(z) f'(z) = \int_a^b \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z)^2} \, \mathrm{d}t = \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} \, \mathrm{d}\xi$$

  D'où le résultat pour $n = 1$. On conclut par récurrence (l'hérédité est similaire).

– On pose :

$$g(\xi) = \frac{f(\xi) - \left(f(z) + f'(z)(\xi - z) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(z)(\xi - z)^n\right)}{(\xi - z)^{n+1}}$$

  g est holomorphe sur $\Omega \setminus \{z\}$ et $g(z) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(z)$ donc continue en z.
  g est donc holomorphe sur Ω. On applique le théorème de Cauchy :

$$\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} = \int_\gamma \frac{f(z)}{(\xi - z)^{n+1}} + \frac{f'(z)}{(\xi - z)^n} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} \frac{f^{(n-1)}(z)}{(\xi - z)^2} \, \mathrm{d}\xi + \frac{1}{n!} \int_\gamma \frac{f^{(n)}(\xi)}{\xi - z} \, \mathrm{d}\xi$$

  Dans le second membre, toutes les intégrales sont nulles car les intégrandes sont des dérivées de fonctions holomorphes donc :

$$\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \, \mathrm{d}\xi = \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \int_\gamma \frac{1}{\xi - z} \, \mathrm{d}\xi$$

  CQFD ∎

COROLLAIRE 8.5 *Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Soit $a \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $D(a,r) \subset \Omega$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{n!}{r^n} \max_{z \in C(a,r)} |f(z)|$$

Démonstration. On pose $\gamma = C(a,r)$. On a $I_\gamma(a) = 1$.

$$\begin{aligned} f^{(n)}(a) &= \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + r\mathrm{e}^{i\theta}) ir\mathrm{e}^{i\theta}}{r^{n+1}\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}} \mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

Donc on majore le module :

$$|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(a + r\mathrm{e}^{i\theta})|}{r^n} \mathrm{d}\theta \leqslant \frac{n!}{r^n} \max_{z \in \mathrm{Im}(\gamma)} |f(z)|$$ ■

COROLLAIRE 8.6 LIOUVILLE *Si f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et bornée alors f est constante.*

Démonstration. Pour tout $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $r > 0$, on a $\overline{D}(a,r) \subset \mathbb{C}$.

On a :
$$|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{n!}{r^n} M$$

Avec $r \to +\infty$, on a $f^{(n)}(a) = 0$ donc f est constante. ■

Remarque 8.7 Plus généralement, si f est holomorphe sur $\mathbb{C}$, et s'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $A, B \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leqslant A|z|^p + B$. Alors on a : $|f^{(n)}(0)| \leqslant \frac{n!}{r^n}(A|r|^p + B)$.

Pour $n > p$, on fait tendre r vers $+\infty$ et on a $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n > p$.

Donc $f - \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k = 0$ sur $D(0,r)$ donc partout.

COROLLAIRE 8.7 D'ALEMBERT *Tout polynôme non constant a une racine dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Soit P un polynôme. On suppose qu'il ne s'annule pas. On a alors $f = \frac{1}{P}$ holomorphe sur $\mathbb{C}$.

On pose $n = \deg(P)$.

$|z|^n |f(z)| = \frac{|z|^n}{|P(z)|} \to |a_n|$ quand $|z| \to +\infty$.

Donc $|f(z)| \sim \frac{|a_n|}{|z|^n} \to 0$.

Donc f est bornée donc constante. ■

<u>Théorème 8.11</u> *Soit Ω un ouvert connexe et $(h_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω telles que pour tout $K \subset \Omega$ compact, f_n cvu vers f sur K. f est holomorphe (par Morera) et pour tout k, $f_n^{(k)}$ cvu vers $f^{(k)}$ sur K.*

Démonstration. Soit $K \subset \Omega$ compact.

On pose $\varepsilon = d(K, \Omega^c) > 0$ et $K_\varepsilon = \{z \in \Omega, d(z, K) \leqslant \frac{3\varepsilon}{4}\}$. C'est un compact inclus dans Ω.

Si $z \in \mathbb{K}$ alors $D(z, \frac{\varepsilon}{2}) \subset K_\varepsilon$ et on a :

$$|f_n^{(p)}(z) - f^{(p)}(z)| \leqslant \frac{p!}{(\frac{\varepsilon}{2})^p} \max_{C(z,\frac{\varepsilon}{2})} |f_n(z') - f(z')|$$

Or $\max\limits_{C(z,\frac{\varepsilon}{2})} |f_n(z') - f(z')| \leqslant \max\limits_{K_\varepsilon} |f_n(z') - f(z')| \to 0$.

D'où le résultat. ■

Remarque 8.8 On peut munir $\mathcal{H}(\Omega)$ avec une topologie associée à la cvu.

On écrit $\Omega = \bigcup\limits_{p=0}^{\infty} K_p$ avec K_p des compacts contenant un point d'accumulation.

On pose $d_p(f,g) = \max\limits_{z \in K_p} |f(z) - g(z)|$ et $d(f,g) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} \frac{\min(1, d_p(f,g))}{2^p}$.

On a même une métrique.

Soit $A \subset \mathcal{H}(\Omega)$ borné pour cette métrique et $f \in A$.

f est bornée sur chaque K_p donc ses dérivées aussi. Par le théorème d'Ascoli, toute suite de A va avoir une sous-suite qui cvu sur K_p.

Par extraction diagonale, on obtient une sous-suite qui cvu sur tous les K_p donc sur tous les compacts. Donc les fermés bornés sont compacts ! (mais pas de contradiction car on n'est pas normé).

Chapitre 9

Généralisations

9.1 Exemple

On se place sur une couronne $\Omega = \{z, R_1 < |z| < R_2\}$.

On prend γ_1 un lacet qui tourne une fois dans le mauvais sens autour du cercle intérieur et γ_2 dans le bon sens.

On pose $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$.

Soit f holomorphe sur la couronne.

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

comme γ_1 et γ_2 sont homotopes.

Pour tout $z \in \Omega$, on pose $g(\xi) = \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z}$ qui est holomorphe.

$$\int_\gamma g(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0 = \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi - f(z)\int_\gamma \frac{1}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi$$

D'où $2i\pi I_\gamma(z) f(z) = \displaystyle\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi$. Donc

$$2i\pi I_\gamma(z) f(z) = \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi + \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi$$

De plus,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \,\mathrm{d}\xi &= \int_\gamma \frac{f(\xi)}{z(\frac{\xi}{z} - 1)} \,\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\gamma_1} -f(\xi)\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi}{z}\right)^n \,\mathrm{d}\xi \\ &= -\int_{\gamma_1} f(\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\xi^{n-1}z^{-n} \,\mathrm{d}\xi \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\gamma_1} f(\xi)\xi^{n-1} \,\mathrm{d}\xi z^{-n}\end{aligned}$$

On fait pareil sur γ_2 et on a donc un développement en série de Laurent.

Ce raisonnement marche si f est holomorphe sur $\Omega \setminus \{0\}$ avec Ω un voisinage de 0.

Donc f holomorphe sur un voisinage de 0 et 0 est une singularité isolée de f.

9.2 Intégrale sur des cycles

Définition 9.1 Soient $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ des chemins fermés dans Ω. Le cycle $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$ est défini par ;

$$\int_\gamma f(z) \,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f(z) \,\mathrm{d}z$$

Exemple 9.1 Soit K un compact à bord orienté, dont le bord est formé d'un nombre fini de chemins fermés. On définit le cycle dont les chemins fermés sont les morceaux du bord de K tel que l'intérieur de K soit à gauche.

Théorème 9.1 *Soit Ω un ouvert connexe, f holomorphe sur Ω.*

Soit γ un cycle de Ω, $z \notin \Omega$ tel que $I_\gamma(z) = 0$.

Alors $\int_\gamma f(z) \,\mathrm{d}z = 0$.

Remarque 9.1 Si Ω est simplement connexe, Ω vérifie les hypothèses précédentes. Donc on a les théorèmes de Cauchy dans les ouverts simplement connexe.

Corollaire 9.1 *Soit Ω un ouvert simplement connexe. Si f est holomorphe sur Ω, il existe F holomorphe telle que $F' = f$.*

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$.

Soit γ un chemin allant de z_0 à z. On pose $F(z) = \int_\gamma f(\xi) \,\mathrm{d}\xi$.

La définition de F ne dépend pas de γ.
Soit $z \in \Omega$. Il existe $r > 0$ tel que $D(z,r) \subset \Omega$.
Soit γ allant de z_0 à z et $\xi \in D(z,r)$.
$F(\xi) = \int_{\gamma+[z,\xi]} f(\eta)\,\mathrm{d}\eta$ donc on a :

$$\frac{F(z)-F(\xi)}{z-\xi} = \frac{1}{z-\xi}\int_{[z,\xi]} f(\eta)\,\mathrm{d}\eta \underset{\xi\to z}{\to} f(z) \qquad \blacksquare$$

Corollaire 9.2 *Si Ω est simplement connexe et ne contient pas 0, alors il existe un logarithme.*

9.3 Exemple de calculs d'intégrales

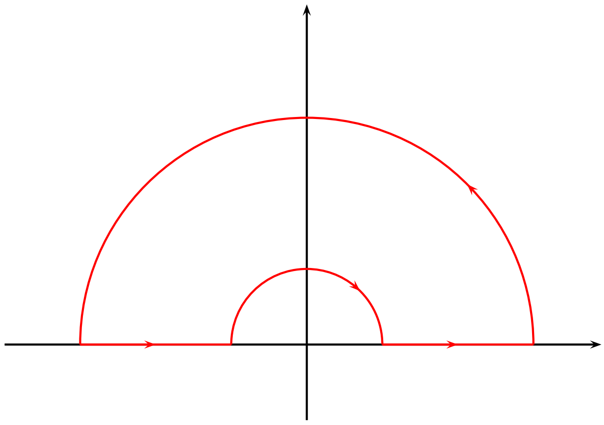
1. $I = \int_0^{2\pi} R(\sin(t),\cos(t))\,\mathrm{d}t$ avec R une fraction rationnelle sans pôle sur $C(0,1)$.
   On pose $\gamma(t) = \mathrm{e}^{it}$.
   On a $\sin = \frac{1}{2i}(\gamma - \frac{1}{\gamma})$ et $\cos = \frac{1}{2}(\gamma + \frac{1}{\gamma})$. Donc

   $$I = 2i\pi \sum_{\alpha\in A} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{iz}R\left(\frac{1}{2i}\left(\gamma-\frac{1}{\gamma}\right),\frac{1}{2}\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)\right),\alpha\right) I_\gamma(\alpha)$$

   avec A l'ensemble des pôles.
2. $I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,\mathrm{d}x$ avec R une fraction rationnelle telle que $|xR(x)| \to 0$ quand $|x| \to +\infty$.
   On a :

   $$\int_{-r}^{r} R(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} R(r\mathrm{e}^{i\theta}) ir\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2i\pi\sum_{\alpha\in A}\operatorname{Res}(R,\alpha) I_\gamma(\alpha)$$

   avec A l'ensemble des pôles de R.
   On montre que la seconde intégrale tend vers 0 et on a alors le résultat.
3. $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{ix}\,\mathrm{d}x$ avec f holomorphe au voisinage de tout z tel que $\Im(z) \geqslant 0$.



$$0 = \int_0^\pi \frac{\mathrm{e}^{ire^{i\theta}}}{r\mathrm{e}^{i\theta}} ir\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta + \int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{r} \frac{\mathrm{e}^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^\pi \frac{\mathrm{e}^{i\varepsilon\mathrm{e}^{i\theta}}}{\varepsilon\mathrm{e}^{i\theta}} i\varepsilon\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

De plus :

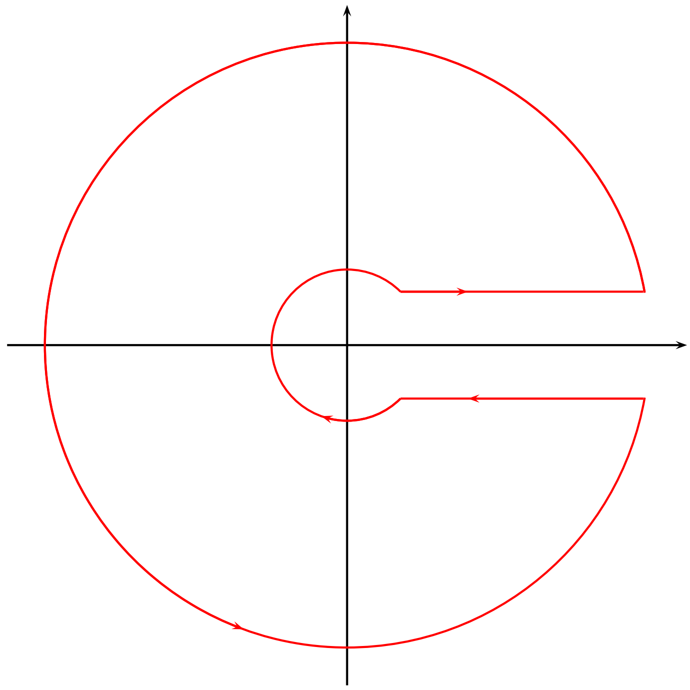
$$\left|\int_0^\pi \frac{\mathrm{e}^{ire^{i\theta}}}{r\mathrm{e}^{i\theta}} ir\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \int_0^\pi \mathrm{e}^{-r\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta \to 0$$

par convergence dominée.

Enfin, la deuxième intégrale est majorée par $M\varepsilon\pi - i\pi$.

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x = i\pi$.

4. $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ avec $\alpha \in]0,1[$ et R une fraction rationnelle qui tend vers 0 à l'infini et qui n'a pas de pôle sur $\mathbb{R}^+$.



Soit $\delta > 0$ assez petit pour que R n'ait pas de pôle de partie imaginaire strictement plus petite que δ.

$$\int_\gamma \frac{R(z)}{z^\alpha}\,\mathrm{d}z = 2i\pi \sum \mathrm{Res}\left(\frac{R(z)}{z^\alpha}, \alpha\right) I_\gamma(\alpha)$$
$$= \int_\gamma \frac{R(z)}{z^\alpha}\,\mathrm{d}z + \int_\gamma \frac{R(z)}{z^\alpha}\,\mathrm{d}z + \int_\varepsilon^r \frac{R(x+i\delta)}{(x+i\delta)^\alpha}\,\mathrm{d}x - \int_\varepsilon^r \frac{R(x-i\delta)}{(x-i\delta)^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

De plus,

$$\int_\varepsilon^r \frac{R(x+i\delta)}{(x+i\delta)^\alpha}\,\mathrm{d}x \to \int_\varepsilon^r \frac{R(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

Et

$$\int_\varepsilon^r \frac{R(x-i\delta)}{(x-i\delta)^\alpha}\,\mathrm{d}x \to \mathrm{e}^{-2i\pi\alpha} \int_\varepsilon^r \frac{R(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

