Distributions

Pierron Théo

ENS Ker Lann

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Motivation

On veut dériver toutes les fonctions.

Exemple 1.1 Considérons la fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}$. Elle est continue dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf en 0.

On pourrait se dire que sa dérivée vaut $2 \times \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} - 1$ et qu'en 0, on s'en fiche. Mais alors la dérivée seconde vaut 0 et donc $|x| = ax + b$ pour un certain (a, b). on ne peut donc pas donner de valeur cohérente en 0.

1.2 Idées

Lemme 1.0.1
Soit $\varphi \in C_c^\infty$ positives d'intégrale 1 nulle en dehors de $]-c, c[$. Soit $\varphi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\varphi(\frac{\cdot}{\varepsilon})$. Alors, si f est continue, la fonction $f * \varphi_\varepsilon$ cvu sur tout compact bets f quand $\varepsilon \to 0$.

En outre, $f * \varphi_\varepsilon \in C^\infty$.

Proposition 1.1 $(f * \varphi_\varepsilon)' = f * (\varphi_\varepsilon)'$.

Chapitre 2

Fonction tests

Définition 2.1 On appelle fonctions test sur X une fonction $C^\infty(X, \mathbb{C})$ à support compact.

L'espace vectoriel des fonctions test est noté C_0^∞ ou $D(X)$.

Remarque 2.1 La seule fonction analytique à support compact est nulle.

Proposition 2.1 Pour tout $p \in \mathbb{R}^n$ et U ouvert contenant p, il existe $\varphi \in C^\infty(U)$ positive, d'intégrale 1 à support dans U et $\varphi(p) > 0$.

Démonstration. Sur $\mathbb{R}$, on prend $\alpha(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \mathbb{1}_{x>0}$, $\beta(x) = \alpha(x-a)\alpha(b-x)$ et $\gamma = \beta$ renormalisée.

Dans $\mathbb{R}^n$, on considère sur un pavé $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}]a_i, b_i[$ la fonction $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} \gamma_{a_j, b_j}(x_j)$ qui marche bien puisque tout ouvert contient un pavé. ■

Définition 2.2 Soit $(\varphi_j)_j$ une suite dans $C_0^\infty(X)$ et $\varphi \in C_0^\infty(X)$. On dit que φ_j converge vers φ ssi

(i) il existe K compact de X et $N \geqslant 0$ tel que pour tout $j \geqslant N$, $\mathrm{supp}(\varphi_j) \subset K$

(ii) pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\partial^\alpha \varphi_j$ cvu vers $\partial^\alpha \varphi$ sur K.

Définition 2.3 On appelle suite régularisante dans $C_0^\infty(X)$ une suite $(\varphi_j)_j$ de C_0^∞ telle que pour tout j,

$$\varphi_j \geqslant 0, \int \varphi_j = 1, \mathrm{supp}\, \varphi_j \subset B\left(0, \frac{1}{j}\right)$$

Théorème 2.1 *Soit φ_j une suite régularisante et $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$.*

Alors $f * \varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $|\alpha| \leqslant k$, $\partial^\alpha(f * \varphi_j)$ cvu vers $\partial^\alpha f$.

Corollaire 2.1 *Si $f \in C_0^\infty$ alors $f * \varphi_j$ cv vers f dans C_0^∞.*

Démonstration. $f * \varphi_j \in C_0^\infty$ par un lemme précédent.

Si $|\alpha| \leqslant k$, on a aussi $\partial^\alpha(f * \varphi_j) = (\partial^\alpha f) * \varphi_j$. Il suffit donc de montrer le résultat pour $k = 0$.

Il suffit d'étendre un lemme précédent à la dimension n. ■

Remarque 2.2 Le convergence dans C_0^∞ provient d'une topologie : de la plus fine qui rende les injections $C_0^\infty(K) \hookrightarrow C_0^\infty(X)$ pour tout K compact de X. (La topologie sur $C_0^\infty(K)$ est celle de la cvu sur K des f_n et des dérivées, engendrée par la famille de semi-normes $p_k(\varphi) = \max_{|\alpha|\leqslant k, x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$).

On obtient un evtlc non métrisable mais complet.

Lemme 2.1.1
Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, il existe $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\operatorname{supp}(\varphi) \subset B(a, 2r), 0 \leqslant \varphi \leqslant 1, \varphi|_{B(a,r)} = 1$$

Démonstration. Par translation et dilatation, on prend $a = 0$ et $r = 1$.

Il existe $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}$ d'intégrale 1 et à support dans $[1, 4]$.

$\psi(x) = \int_x^4 \eta(t)\,\mathrm{d}t$ vérifie les hypothèses pour $n = 1$. On pose $\varphi(x) = \psi(\|x\|)$ et ça marche ! ■

<u>Définition 2.4</u> Soit K un compact de X, U un recouvrement ouvert de K. Une partition de l'unité subordonnée à U est une suite de fonctions $\psi_1, \ldots, \psi_l$ dans $C_0^\infty(X)$, positives telles que

- Il existe un voisinage V de K sur lequel $\displaystyle\sum_{j=1}^{l} \psi_j = 1$
- pour tout j, il existe $U_j \in I$ tel que $\operatorname{supp}(\psi_j) \subset U_j$.

<u>Théorème 2.2</u> *Pour tout compact $K \subset X$ et tout recouvrement U ouvert de K, il existe une partition de l'unité subordonnée à U.*

Démonstration. Pour tout $a \in K$, soit $U_a \in U$ un ouvert contenant a. SOit $r > 0$ tel que $B(a, 2r) \subset U_a$. Par compacité, il existe $a_1, \ldots, a_l$ tel que $K \subset \displaystyle\bigcup_{j=1}^{l} B(a_j, r)$.

On prend les $\varphi_j \in C_0^\infty(X)$ fournis par le lemme. On pose alors $\psi_1 = \varphi_1$ et $\psi_{j+1} = \varphi_{j+1} \displaystyle\prod_{i=1}^{j} (1 - \varphi_j)$.

On montre par récurrence que $\displaystyle\sum_{i=1}^{j} \psi_i = 1 - \prod_{i=1}^{j} (1 - \varphi_i)$, ce qui conclut. ■

Remarque 2.3 Si $\varphi \in C_0^\infty(X)$ et $f \in C^0(X)$ le fait de considérer φf s'appelle faire une troncature. On dit alors que φ est fonction de troncature.

Corollaire 2.2 *Soit K compact. Pour tout voisinage X de K, il existe $\chi \in C_0^\infty$ à support dans X, valant 1 sur K et tel que $0 \leqslant \chi \leqslant 1$.*

Définition 2.5 Une fonction f mesurable sur X ouvert de $\mathbb{R}^n$ est dite localement intégrable ssi pour tout $a \in X$, ile xiste un pavé $R_a \ni a$ tel que $\int_{R_a} |f| < \infty$.

Lemme 2.2.1

Soit $f \in L_{loc}^2$ et $g \in C_0^k$. ALors $f * g \in C^k$ et $\operatorname{supp}(f*g) \subset \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)$.

Si f a un support compact alors $f * g \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Si $f \in L_{loc}^1$ et $\varphi \in C_0^\infty$ alors $f\varphi$ est intégrable puisqu'on peut recouvrir K par un nombre fini de pavés R_a et on a

$$\int |f\varphi| \leqslant \int_K |f\varphi| \leqslant \sum_{j=1}^{l} \int_{R_{a_j}} |f\varphi| \leqslant \sup_K |\varphi| \sum_{j=1}^{l} \int_{R_{a_j}} |f| < \infty$$

Posons $h(x,y) = f(y)g(x-y)$. C'est une fonction C^k et

$$\partial_x^\alpha h = f(y) \partial_x^\alpha g(x-y)$$

est intégrable car f l'est et g est à support compact. Par dérivation sous l'intégrale, on a le résultat. ∎

Théorème 2.3 *Soit X ouvert de $\mathbb{R}^n$. C_0^∞ est dense dans $L^p(X)$ pour $1 \leqslant p < \infty$.*

Démonstration. On va supposer connu que $C_0^0(X)$ est dense dans $L^p(X)$. Il suffit de montrer que C_0^∞ est dense dans C_0^0 pour la norme p.

Soit φ_j une suite régularisante. On montre que si $f \in C_0^0$, $f * \varphi_j$ converge vers f dans L^p, ce qui découle de l'uniforme continuité de f sur les compacts. ∎

Chapitre 3

Distributions

3.1 Définition

Définition 3.1 Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle distribution sur X une forme linéaire séquentiellement continue de $C_0^\infty(X)$. On note $D'(X)$ leur espace.

Si $u \in D'(X)$, on notera indifféremment $u(\varphi)$ ou $\langle u, \varphi \rangle$.

Exemple 3.1

- Distribution de Dirac. On note $\delta_a : \varphi \mapsto \varphi_a$. C'est une forme linéaire et elle est continue car si $\varphi_j \to \varphi$ uniformément, $\varphi_j(a) \to \varphi(a)$.
- Valeur principale de Cauchy. Elle est définie par

$$\varphi \mapsto \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x} \, \mathrm{d}x$$

C'est une distribution.

Remarque 3.1 *$D'(X)$ est un $\mathbb{C}$-ev. Admet-il une topologie ?*

3.2 Distributions et fonctions localement intégrables

Théorème 3.1 *Si $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(X)$, on définit une distribution* $\operatorname{test} f$ *sur X par*

$$\langle \operatorname{test} f, \varphi \rangle = \int_X f \varphi$$

Démonstration. $\operatorname{test} f$ est bien une forme linéaire. Si φ est à support dans K, on a

$$\left| \int_X f \varphi \right| \leqslant \sup_K |\varphi| \int_K |f|$$

Donc si $\varphi_j \to \varphi$, alors $\varphi_j - \varphi$ cvu vers 0 donc

$$\left|\int f(\varphi_j - \varphi)\right| \leqslant C_K \sup_K |\varphi_j - \varphi| \to 0$$

Donc $\operatorname{test} f$ est continue. ■

Lemme 3.1.1
$f \mapsto \operatorname{test} f$ est injective de $C^0(X) \to D'(X)$. On peut donc considérer les fonctions continues comme des distributions.

Démonstration. On suppose que $f \neq 0$. Il existe donc $x, \varepsilon > 0$ tel que $f|_{]x-\varepsilon,x+\varepsilon[} > \alpha > 0$ et $f|_{]x-2\varepsilon,x+2\varepsilon[} > 0$. On prend alors φ valant 1 sur $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ et à support dans $]x-2\varepsilon, x+2\varepsilon[$.

On a bien $\int f\varphi > 0$. ■

Proposition 3.1 Soit $f \in \mathscr{L}^2(X)$ et φ_j une suite régularisante. Alors $f * \varphi_j \to f$ en norme L^1.

Démonstration. Par Fubini, on a $\|f * \varphi_j\|_{L^1} \leqslant \|f\|_1 \|\varphi_j\|_1$.

On sait que C_0^0 est dense dans L^1 donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f_\varepsilon \in C_0^0(X)$ tel que $\|f - f_\varepsilon\|_1 \leqslant \varepsilon$. On a donc

$$\|f * \varphi_j - f_\varepsilon * \varphi_j\|_1 \leqslant \|f - f_\varepsilon\| \|\varphi_j\| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\|f * \varphi_j - f\|_1 &\leqslant \|f * \varphi_j - f_\varepsilon * \varphi_j\|_1 + \|f_\varepsilon * \varphi_j - f_\varepsilon\|_1 + \|f_\varepsilon - f\|_1 \\ &\leqslant 2\varepsilon + \|f_\varepsilon * \varphi_j - f_\varepsilon\|_1 \to 0\end{aligned}$$

car $f_\varepsilon \in C_0^0(X)$ donc il y a cvu donc cv en norme 1. ■

Corollaire 3.1 *L'application $f \mapsto \operatorname{test} f$ de $L^1_{loc} \to D'(X)$ est injective.*

Démonstration. Si $\operatorname{test} f = 0$, on veut montrer que $f = 0$ pp. Soit $K \subset X$ compact. Soit χ une fonction de troncature valant 1 sur un voisinage de K.

Soit $g = f\chi \in \mathscr{L}^1$. On a $\operatorname{test} g = 0$ puisque $\chi\varphi \in C_0^\infty$. Si φ_j est une suite régularisante, $g * \varphi_j \to g$ en norme L^1.

Or $g * \varphi_j(x) = \langle \operatorname{test} g, y \mapsto \varphi_j(y - x)\rangle = 0$ car $y \mapsto \varphi_j(y-x) \in C_0^\infty$.

Ainsi, g est nulle presque partout et f est nulle pp sur K. Comme X est union dénombrable de compacts, $f = 0$ pp sur X. ■

Remarque 3.2 On va donc souvent identifier les fonctions L^1_{loc} à des distributions. On omettra donc d'écrire les test. *Inversement, on notera $\int u\varphi$ au lieu de $\langle u, \varphi$.*

Remarque 3.3 *Certaines distributions ne sont pas des fonctions. Prenons par exemple δ_a. Si $\delta_a = \operatorname{test} f$, on écrit pour tout φ :*

$$\int f\varphi = \varphi(a)$$

Donc si $a \notin \operatorname{supp}\chi$, $\int f\chi = 0$ et même $\int f\chi\varphi = 0$ donc $f\chi = 0$. Par le corollaire, $f\chi = 0$ et $f = 0$.

Alors $\operatorname{test} f = 0$ *mais $\delta_a \neq 0$. Contradiction*

3.3 Ordre d'une distribution

<u>Théorème 3.2</u> *Soit u une forme linéaire sur $C_0^\infty(X)$. Alors u est un distribution ssi $(*)$ pour tout $K \subset X$ compact,*

$$\exists C_k, k_K \in \mathbb{N}, |\langle u, \varphi\rangle| \leqslant C_k \|\varphi\|_{C^{k_K}} \forall \varphi \in C_0^\infty(K)$$

Démonstration.

- Si $(*)$, montrons que u est continue. Soit $\varphi_j \to 0$ dans $C_0^\infty(X)$.
  On sait qu'il existe $K \subset X$ compact tel que $\operatorname{supp}\varphi_j \subset K$ et $\|\varphi_j\|_{C^k} \to 0$. Par $(*)$,
  $$|\langle u, \varphi_j\rangle| \leqslant C_K \|\varphi_j\|_{C^{k_K}} \to 0$$
- Si on n'a pas $(*)$, il existe K compact tel que pour tout c, k, il existe $\varphi_{c,k}$ tel que
  $$|\langle u, \varphi_{c,k}\rangle| > c \|\varphi_{c,k}\|_{C^k}$$
  Posons $\psi_{c,k} = \frac{\varphi_{c,k}}{\langle u, \varphi_{c,k}\rangle} \in C_0^\infty$.
  On a $\langle u, \psi_{c,k}\rangle = 1$ et $\|\psi_{c,k}\|_{C^k} < \frac{1}{c}$. Ainsi, la suite $\psi_{k,k}$ tend vers 0 dans C_0^∞ (si k_0 est fixé, $\|\psi_{k,k}\|_{C^{k_0}} \leqslant \|\psi_{k,k}\|_{C^k}$ pour $k \geqslant k_0$).
  Donc u n'est pas continue puisque $\psi_{k,k} \to 0$ et $\langle u, \psi_{k,k}\rangle = 1$. ■

<u>Définition 3.2</u> Si $u \in D'(X)$, soit $K \subset X$ compact. On appelle ordre de u sur K le plus petit entier $k \geqslant 0$ tel que

$$|\langle u, \varphi\rangle| \leqslant c_K \|\varphi\|_{C^k}$$

L'ordre de u est le sup des ordres de u sur tout compact de X.

Exemple 3.2 $u : \varphi \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^j \varphi^{(k)}(k)$ est une distribution d'ordre infini.

δ_a est d'ordre 0.

<u>Théorème 3.3</u> *Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. Soit $u \in D'(X)$ d'ordre 0. Alors u s'étend de manière unique en une forme linéaire continue v sur $C_0^0(X)$, ie une mesure de Radon.*

Démonstration.

- Si v, calculons $v(f)$ pour $f \in C_0^0$. Soit φ_j une suite régularisante. On pose $f_j = f * \varphi_j$.
  f_j cvu vers f dont $f_j \to f$ dans C_0^0 (support inclus dnas un compact fixe) donc $u(f_j) = v(f_j) \to v(f)$ par continuité. Ainsi, nécessairement, $v(f) = \lim\limits_{j\to\infty} u(f_j)$.
- On montre que $u(f_j)$ existe.

$$|u(f_j - f_p)| \leqslant C_K \|f_j - f_p\|$$

  car u est d'ordre 0. Comme $\|f_j - f_p\| \to 0$, $(u(f_j))_j$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$ donc converge.
- Il reste à montrer que $v(f) = \lim\limits_{j\to\infty} u(f_j)$ est continue.

$$\begin{aligned}|v(f)| &\leqslant |v(f) - u(f_j)| + |u(f_j)| \leqslant |v(f) - u(f_j)| + C\|f_j\| \\ &\leqslant |v(f) - u(f_j)| + C\|f\| + C\|f - f_j\| \to C\|f\|\end{aligned}$$

■

Chapitre 4

Dérivées de distributions

4.1 Définitions

Si $f \in C^1(X)$, on peut voir f comme une distribution. Posons $x \in \mathbb{R}^n$.
La dérivée $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ est continue donc c'est une distribution et

$$\left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle$$

Définition 4.1 Soit $u \in D'(X)$. On définit $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in D'(X)$ par

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = -\left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle$$

Remarque 4.1 Si $f \in C^1$, la dérivée au sens des distributions de f (ie la dérivée de test *f) coïncide avec la distribution associée à la dérivée usuelle de f.*

Lemme 4.0.1
Si $u \in D'(X)$ alors pour tout j, k, $\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_j}$.

Remarque 4.2 On peut donc utiliser la notation multi-indices.

Exemple 4.1 La dérivée de $|\cdot|$ au sens des distributions est Sgn. $\mathrm{Sgn}' = 2\delta_0$.

4.2 Primitives de distributions

Théorème 4.1 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle. Soit $u \in D'(I)$. Il existe $v \in D'(I)$ tel que $v' = u$.*

En outre, si $w' = u$ avec $w' \in D(I)$ alors $w = v + cste$.

Démonstration. Soit $\chi \in C_0^\infty(I)$ d'intégrale 1. Pour $\varphi \in C_0^\infty(I)$, on définit

$$p(\varphi) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \langle 1, \varphi \rangle \int_{-\infty}^{x} \chi(t)\,\mathrm{d}t$$

$p(\varphi)$ est C^∞ à support compact et p est continue. De plus $p(\varphi') = \varphi$. Posons $v = -u \circ p \in D'(I)$. On a bien $v' = u$.

Soit w telle que $w' = u$. Alors $a := v - w$ vérifie $a' = 0$ donc pour tout ψ, $\langle a', \psi \rangle = 0$ donc $\langle a, p(\varphi') \rangle = 0$.

Ce qui signifie que $a = \langle a, \chi \rangle = cste$. ∎

Chapitre 5

Convergence des distributions

5.1 Définition

Définition 5.1 Soit u_j une suite dans $D'(X)$ et $u \in D'(X)$. On dit que u_j tend vers u au sens des distributions ssi pour tout $\varphi \in C_0^\infty(X)$, $\langle u_j, \varphi \rangle \to \langle u, \varphi \rangle$.

Exemple 5.1
- Si $f_j \to f$ en norme L^1 sur tout compact alors $f_j \rightharpoonup f$.
- Si φ_j est une suite régularisante, $\varphi_j \rightharpoonup \delta_0$.
- $u_k : x \mapsto k e^{ikx} 1_{x \geqslant 0}$ converge vers $i\delta_0$.

THÉORÈME 5.1 *Si $u_j \in D'(X)$ vérifie que pour tout φ, $\langle u_j, \varphi \rangle$ converge dans $\mathbb{C}$ alors sa limite $\varphi \mapsto \lim \langle u_j, \varphi \rangle$ est dans $D'(X)$ et $u_j \rightharpoonup u$.*

Démonstration. u est linéaire. Soit $K \subset X$ compact et $\varphi \in C_0^\infty(X)$.

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leqslant |\langle u_j, \varphi \rangle| + |\langle u, \varphi \rangle - \langle u_j, \varphi \rangle|$$

Par Banach-Steinhaus dans le Fréchet $C_0^\infty(K)$, $|\langle u_j, \varphi \rangle| \leqslant C_k \|\varphi\|_{C^k}$. On a donc

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leqslant C_k \|\varphi\|_{C^k}$$

∎

Remarque 5.1 Sous les hypothèses du théorème et si $\varphi_j \to \varphi$ dans C_0^∞ alors $\langle u_j, \varphi_j \rangle \to \langle u, \varphi \rangle$.

Proposition 5.1 Si $(u_t)_t$ est une famille dans $D'(X)$ et pour tout φ,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\langle u_{t+h}, \varphi \rangle - \langle u_t, \varphi \rangle}{h}$$

existe alors la limite $\frac{\partial u_t}{\partial t}(t_0)$ est une distribution pour tout t_0.

5.2 Dérivées d'une suite convergente

<u>Théorème 5.2</u> *Soit* u_j *une suite de* $D'(X)$ *qui converge vers* $u \in D'(X)$*. Alors pour tout* α*,* $\partial^\alpha u_j \rightharpoonup \partial^\alpha u$*.*

Chapitre 6

Localisation

Soit $U \subset X$ deux ouverts. L'injection canonique $C_0^\infty(U) \to C_0^\infty(X)$ est continue. On a donc une injection continue $D'(X) \to D'(U)$.

<u>Théorème 6.1</u> *Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $u \in D'(X)$. On suppose que pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U_x de x tel que $u = 0$ sur U_x. Alors $u = 0$.*

Démonstration. Pour tout x il existe U_x tel que $u|_{U_x} = 0$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(X)$. $\{U_x, x \in \operatorname{supp}\varphi\}$ est un recouvrement ouvert de $K := \operatorname{supp}\varphi$.

Il existe donc J fini tel que $K \subset \bigcup_{j\in J} U_{x_j}$. Pour tout j, il existe $\varphi_j \in C_0^\infty(X)$ à support dans U_{x_j} et telle que $\sum_{j\in J}\varphi_j = 1$ sur K.

$$\langle u, \varphi\rangle = \sum_{j\in J}\langle u, \varphi_j\varphi\rangle = 0 \qquad \blacksquare$$

<u>Définition 6.1</u> Le support de $u \in D'(X)$ noté $\operatorname{supp}(u)$ est l'ensemble des points $x \in X$ au voisinage desquels il n'existe pas d'ouvert U_x contenant x tel que $u|_{U_x} = 0$.

Autrement dit, $x \notin \operatorname{supp} u$ ssi il existe U_x contenant x sur lequel u est nul. $X \setminus \operatorname{supp} u$ est le plus grand ouvert de X sur lequel $u = 0$.

Exemple 6.1 Si $u \in C_0^0(X)$ le support de u vue comme une distribution coïncide avec le support habituel de u.

Remarque 6.1 Si $U \subsetneq X$,

$$\rho : \begin{cases} D'(X) & \to & D'(U) \\ u & \mapsto & u|_U \end{cases}$$

n'est pas injectif. En effet, il existe $a \in X \setminus U$ et on a $\rho(\delta_a) = 0$.

S'il existe $v \in D'(X)$ tel que $\rho(v) = u$ on dit que c'est une extension de u à X.

Exemple 6.2 Si $X = \mathbb{R}$ et $U = \mathbb{R}_+^*$. Posons $f_k(x) = x^{-k}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

On pose $v_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\frac{\partial^k \ln|x|}{\partial x^k} \in D'(\mathbb{R})$ et on a $v_k|_U = f_k$.

Exemple 6.3 $u(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \in D'(U)$. S'il existe $v \in D'(\mathbb{R})$ tel que $v|_U = u$, pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ positive et on pose $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ avec $\varepsilon \in]0,1]$.

$$
\begin{aligned}
a_\varepsilon = \langle \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}, \varphi_\varepsilon\rangle &= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty \frac{1}{x^N N!}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,\mathrm{d}x \\
&\geqslant \frac{1}{N!\varepsilon^N}\int_0^\infty \frac{\varphi(y)}{y^N}\,\mathrm{d}y \geqslant c_N\varepsilon^{-N}
\end{aligned}
$$

On a $v|_U = u$ donc pour un certain N fixé,

$$
|\langle v, \varphi_\varepsilon\rangle| = |a_\varepsilon| \leqslant c \sup_{n \leqslant N'} |\partial_x^n \varphi_\varepsilon(x)| \leqslant c\varepsilon^{-N'-1}
$$

En appliquant la relation précédente avec $N > 1 + N'$, on a la contradiction recherchée puisque $\varepsilon^{N-1-N'}$ serait minoré par une constante non nulle.

<u>Théorème 6.2</u> *Soit $\mathcal{U}$ une famille d'ouverts de X dont l'union vaut X. On suppose que pour tout $U \in \mathcal{U}$, on connait $u_U \in D'(U)$ vérifiant $u_U = u_V$ sur $U \cap V$ pour tout $U, V \in \mathcal{U}$. Alors il existe une unique $u \in D'(X)$ avec $u|_U = u_U$ pour tout u.*

<u>Définition 6.2</u> Soit $u \in D'(X)$. Le support singulier de u est l'ensemble des $x \in X$ qui ne possèdent pas un voisinage ouvert U_x sur lequel $u|_{U_x} \in C^\infty(U_x)$.

Ainsi, x n'est pas dans le support singulier de u ssi il existe U_x voisinage de x tel que $u|_{U_x} \in C^\infty(U_x)$.

Le complémentaire du support singulier est le plus grand ouvert de X sur lequel $u \in C^\infty$.

Chapitre 7

Distributions à support compact

Si $u \in L^1_{loc}(X)$, on peut définir $u(\varphi) = \int_X u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ si φ est à support compact.

Mais si le support de u est compact, on pourait prendre $u \in C^\infty(X)$.

Définition 7.1 Soit $\varphi_j \in C^\infty(X)$ et $\varphi \in C^\infty(X)$. On dit que $\lim\limits_{j \to +\infty} \varphi_j = \varphi$ ssi pour tout multiindice α et pour tout compact $K \subset X$, la suite $\partial_x^\alpha \varphi_j$ cvu sur K vers $\partial_x^\alpha \varphi$.

Définition 7.2 Une forme linéaire sur $C^\infty(X)$ est continue si $u(\varphi_j) \to u(\varphi)$ quand $\varphi_j \to \varphi$. L'ensemble des formes linéaires continus sur $C^\infty(X)$ est noté $\mathcal{E}'(X)$.

Définition 7.3 On dit que $(K_j)_j$ avec K_j compact de X est une suite exhaustive de compacts ssi $K_j \subset K_{j+1}$ et $X = \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}} K_j$.

Lemme 7.0.1
Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

(i) Il existe une suite K_j exhaustive de compacts pour X

(ii) Il existe une suite $\chi_j \in C_0^\infty(X)$ avec $j \in \mathbb{N}$ telle que pour tout $\varphi \in C^\infty(X)$, la suite $\varphi_j = \chi_j \varphi$ converge dans $C^\infty(X)$ vers φ

(iii) La restriction $\rho : \mathcal{E}'(X) \to D'(X)$ est injective

Démonstration.

(i) On pose $K_j = \{x \in X, \|x\| \leqslant j, d(x, C) \geqslant \frac{1}{j}\}$ avec $C = \mathbb{R}^n \setminus X$. C'est une suite exhaustive de compacts.

(ii) On utilise la densité de $C_0^\infty(X)$ dans $C^\infty(X)$. Soit $\chi_j \in C_0^\infty(X)$ avec $\chi_j|_{K_j} = 1$.

Soit $\varphi \in C^\infty$. On considère $\varphi_j = \chi_j \varphi \in C_0^\infty(X)$. Soit K compact de X. Il existe $J \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset K_j$ pour tout $j \geqslant J$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$\partial_x^\alpha \varphi_j|_K = \sum_{|\beta| \leqslant |\alpha|} c_{\alpha,\beta} (\partial_x^\beta \chi_j)(\partial_x^{\alpha-\beta} \varphi) = \chi_j (\partial_x^\alpha \varphi)|_K = \partial_x^\alpha \varphi|_K$$

D'où la convergence (suite stationnaire !).

(iii) On suppose $\rho(u) = \rho(v)$. Pour tout $\varphi \in C^\infty(X)$, on a

$$u(\varphi) = \lim_{j \to +\infty} u(\varphi_j) = \lim_{j \to +\infty} v(\varphi_j) = v(\varphi)$$ ■

<u>Théorème 7.1</u> *Soit $u \in D'(X)$. On a $u \in \mathcal{E}'(X)$ ssi* supp(u) *est un compact de X. Si c'est le cas, alors u est d'ordre fini et il existe $c > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $|u(\varphi)| \leqslant c \|\chi\varphi\|_{C^k}$ pour tout $\varphi \in C^\infty(X)$ et $\chi \in C_0^\infty(X)$ valant* 1 *sur un voisinage de* supp(u).

Démonstration.

$\Leftarrow$ Si supp(u) est un compact K, soit $\chi \in C_0^\infty(X)$ valant 1 sur K. On définit v par $\langle v, \varphi \rangle = \langle u, \chi\varphi \rangle$ pour tout $\varphi \in C^\infty$.
Soit $\varphi_j \to 0$ dans C^∞. Alors $\chi\varphi_j \to 0$ dans $C_0^\infty(X)$ par la formule de Leibniz.
On a donc $v \to 0$ donc $v \in \mathcal{E}'(X)$. Il reste à montrer que $v = u$ dans $D'(X)$. Si $\varphi \in C_0^\infty(X)$, on veut montrer que $\langle u, \varphi \rangle = \langle v, \varphi \rangle$.
$\varphi(1-\chi)$ est nul au voisinage de supp(u) donc supp$(\varphi(1-\chi)) \cap$ supp$(u) = \varnothing$. On a donc $\langle u, \varphi(1-\chi) \rangle = 0$ ie $\langle u, \varphi \rangle = \langle v, \varphi \rangle$.

$\Rightarrow$ Soit $u \in \mathcal{E}'(X)$. Montrons la caractérisation de $\mathcal{E}'(X)$ par les semi-normes :

Lemme 7.1.1

$$\exists C > 0 \exists k \geqslant 0, \exists K \subset X, |\langle u, \varphi \rangle| \leqslant C \|\varphi\|_{C^k(K)} \forall \varphi \in C^\infty(X)$$

Démonstration.

$\Leftarrow$ On choisit $\varphi_j \to 0$ dans $\mathcal{E}(X)$ et on a facilement $\langle u, \varphi_j \rangle \to 0$.

$\Rightarrow$ Sinon pour tout C, k, K, il existe $\varphi_{C,k,K}$ telle que $|\langle u, \varphi_{C,k,K} \rangle| > c \|\varphi\|_{C^k(K)}$.
On choisit $C = k = j$, et $K = K_j$ suite de compacts qui absorbe X. Posons

$$\psi_j = \frac{\varphi_{j,j,K_j}}{|\langle u, \varphi_{j,j,K_j}|}$$

On a $|\langle u, \psi_j \rangle| = 1$ et $\|\psi_j\|_{C^j(K_j)} < \frac{1}{j}$. Cette suite converge donc vers 0 dans $C^\infty(X)$. On fixe k et K. Pour j assez grand, $K \subset K_j$ et $k \leqslant j$, ce qui assure que $\|\cdot\|_{C^k(K)} \leqslant \|\cdot\|_{C^j(K_j)}$.
Donc quand $j \to \infty$, on a une contradiction avec $|\langle u, \psi_j \rangle| = 1$. ■

Si $u \in \mathcal{E}'(X)$, on voit que si $\mathrm{supp}(\varphi)$ est en dehors de K, $|\langle u, \varphi\rangle| = 0$ donc $\mathrm{supp}(u) \subset K$. ■

<u>THÉORÈME 7.2</u> *Toute distribution à support compact et d'ordre fini.*

Démonstration. On sait qu'il existe C, k, K tel que $|\langle u, \varphi\rangle| \leqslant C \|\varphi\|_{C^k(K)}$ pour tout $\varphi \in C^\infty(X)$.

Soit $\chi = 1$ au voisinage de K et $\varphi \in C_0^\infty(X)$. On a $\varphi(1-\chi) = 0$ en dehors du support de u donc $\langle u, \varphi\rangle = \langle u, \chi\varphi\rangle$.

Donc

$$|\langle u, \varphi\rangle| \leqslant C \|\chi\varphi\|_{C^k} \leqslant C' \|\varphi\|_{C^k(\mathrm{supp}\,\varphi)}$$ ■

Remarque 7.1 Si $U \subset X$ tout élément de $\mathcal{E}'(U)$ est un élément de $\mathcal{E}'(X)$, mais ce n'est pas vrai pour $D'(U)$.

<u>THÉORÈME 7.3</u> *Soit $u \in D'(X)$ à support $\{a\}$, $a \in X$. Alors u est combinaison linéaire de dérivées de masses de Dirac en a.*

Lemme 7.3.1

Soit $u \in \mathcal{E}'(X)$ d'ordre k à support $\{a\}$ et $\varphi \in C^\infty(X)$ telle que pour tout $|\alpha| \leqslant k$, $\varphi^{(\alpha)}(a) = 0$. Alors $\langle u, \varphi\rangle = 0$.

Chapitre 8

Multiplication par des fonctions

Définition 8.1 Pour $u \in D'(X)$ et $\psi \in C^\infty(X)$. On définit $\psi u \in D'(X)$ par $\langle \psi u, \varphi \rangle = \langle u, \psi\varphi \rangle$.

Lemme 8.0.2
$\operatorname{supp}(\psi u) \subset \operatorname{supp}(\psi) \operatorname{supp}(u)$.

Exemple 8.1
- $\psi\delta_a = \psi(a)\delta_a$
- $\operatorname{Id} \delta_0 = 0$
- $\operatorname{Id} \operatorname{vp}(\frac{1}{x}) = 1$

Proposition 8.1 $\mathcal{E}'(X)$ est dense dans $D'(X)$.

Démonstration. Soit K_j une suite exhaustive de compacts dans X et $\chi_j \in C_0^\infty$ valant 1 sur K_j. Soit $v_j = \chi_j u \in D'(X)$.

On a $v_j \in \mathcal{E}'$ car $\operatorname{supp}(\chi_j u) \subset \operatorname{supp}(u) \cup \operatorname{supp}(\chi_j)$. Il reste à montrer que $\langle v_j, \varphi \rangle \to \langle u, \varphi \rangle$ pour tout $\varphi \in C_0^\infty$.

Comme $\chi_j \varphi \to \varphi$ dans C_0^∞ et $\langle v_j, \varphi \rangle = \langle u, \chi_j \varphi \rangle$, c'est bon. ■

Proposition 8.2 Si $\psi \in C^\infty(X)$ et $u \in D'(X)$.

$$\partial_j(\psi u) = (\partial_j \psi)u + \psi(\partial_j u)$$

Chapitre 9

Changement de variables

État de l'art :

$$D \to C_0^0(X) \hookrightarrow \mathcal{L}^1_{loc}(X) \to L^1_{loc} \hookrightarrow \{\text{mesures}\} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookrightarrow D'$$

Comment passer de X à Y ?

9.1 Transposition

Définition 9.1 Soient E et F des ev et $A : E \to F$ linéaire.
L'application linéaire transposée de A notée $A^T : F' \to E'$ est définie par

$$\forall l \in F', x \in E, A^T(l)(x) = l(A(x))$$

Exemple 9.1
- La multiplication M_ψ par $\psi \in C_0^\infty$ est linéaire et sa transposée est $M_\psi^T u(\varphi) = \langle u, \psi\varphi\rangle$.
- On peut faire pareil pour la dérivation : ∂_j sur D' est la transposée de $-\partial_j$ sur les fonctions.
- La transposée de l'injection $C_0^\infty(U) \hookrightarrow C_0^\infty(V)$ est la restriction $u \mapsto u|_U$.

9.2 Image réciproque d'une fonction

Définition 9.2 Soit $\Phi : X \to Y$. On définit $\Phi^*\psi$ par $\Phi^*\psi(x) = \psi(\Phi(x))$ pour tout $\psi : Y \to \mathbb{C}$.

Remarque 9.1
- *Si Φ est linéaire et f est une forme linéaire, on obtient la transposition $\Phi^* f = \Phi^T f$.*

- *Si Φ est C^∞, on a que si $f \in C^\infty(Y)$, alors $\Phi^* f \in C^\infty(X)$. Attention : si f est à support compact, $\Phi^* f$ n'est pas en général à support compact.*

9.3 Image directe d'une distribution à support compact

Définition 9.3 Soit X ouvert de $\mathbb{R}^n$ et Y ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soit $\Phi : X \to Y$.

On sait que $\Phi^* : C^\infty(Y) \to C^\infty(X)$. On définit l'image directe par Φ, notée $\Phi_* : \mathcal{E}'(X) \to \mathcal{E}'(Y)$ par $\Phi_* = (\Phi^*)^T$.

On a $\langle \Phi_* u, \varphi \rangle = \langle u, \varphi \circ \Phi \rangle$.

Exemple 9.2 Soit $a \in X$. On considère $\delta_a \in \mathcal{E}'(X)$.

$$\langle \Phi_* \delta_a, \varphi \rangle = \langle \delta_a, \varphi \circ \Phi \rangle = \langle \delta_{\Phi(a)}, \varphi \rangle$$

Donc $\Phi_* \delta_a = \delta_{\Phi(a)}$.

9.4 Image directe dans D'

Définition 9.4 Une application $\Phi : X \to Y$ est dite propre ssi l'image réciproque d'un compact est toujours compacte.

Théorème 9.1 *Soit $\Phi : X \to Y$ une application C^∞ propre. Alors Φ_* s'étend en une unique application continue de $D'(X) \to D'(Y)$ et on a* $\mathrm{supp}(\Phi_* u) \subset \Phi(\mathrm{supp}(u))$.

Démonstration.

! On peut construire une suite $u_j = \chi_j u$ dans $\mathcal{E}'$ telle que $u_j \to u$ dans D'. Nécessairement $\Phi_* u = \lim\limits_{j \to \infty} \Phi_* u_j$.

∃ Soit $L \subset Y$ un compact. Soit $\chi \in C_0^\infty(X)$ valant 1 sur $K := \Phi^{-1}(L)$. On définit pour $\varphi \in C_0^\infty(L)$, $\langle v_L, \varphi \rangle = \langle u, \chi(\varphi \circ \Phi) \rangle$.
v_L est une forme linéaire continue sur $C_0^\infty(L)$. Montrons que $u \mapsto v_L$ est continue.
Soit $u_j \to u$ dans D' avec $u_j \in \mathcal{E}'$. Pour tout $\varphi \in C_0^\infty(L)$,

$$\langle \Phi_* u_j, \varphi \rangle = \langle u_j, \chi(\varphi \circ \Phi) \rangle$$

car $\chi = 1$ sur K. Donc en passant à la limite, ça converge vers $\langle v_L, \varphi \rangle$.
On a donc bien défini une distribution $\Phi_* u \in D'(Y)$.

- Si $\text{supp}(\varphi)$ et $\Phi(\text{supp}(u))$ sont disjoints, les images réciproques par Φ sont disjointes donc

$$\Phi^{-1}(\text{supp}(\varphi)) = \text{supp}(\varphi \circ \Phi) \text{ et } \text{supp}(u) \subset \Phi^{-1}(\Phi(\text{supp}\, u))$$

Donc $\langle u, \varphi \circ \Phi \rangle = 0$.
On a donc $\text{supp}(\Phi_* u) \subset \Phi(\text{supp}(u))$. ■

9.5 Difféomorphismes

Définition 9.5 $\Phi : X \to Y$ est un difféomorphisme ssi Φ est C^∞ bijective à réciproque C^∞.

Définition 9.6 Si Φ est C^1, on définit la jacobienne par $(\frac{\partial \Phi^i}{\partial x_j})_{i,j}$.

Lemme 9.1.1
Soit $\Phi : X \to Y$ et $g : Y \to Z$. $D(g \circ \Phi)(x) = Dg(\Phi(x)) \circ D\Phi(x)$.

Lemme 9.1.2
Si $\Phi : X \to Y$ est un difféomorphisme, alors $n = p$.

Définition 9.7 On appelle jacobien le déterminant de la jacobienne et on note $j_\Phi(x) = |\det D\Phi(x)|$.

Théorème 9.2 *Soient X, Y ouverts de $\mathbb{R}^n$, $\Phi : X \to Y$ un difféomorphisme. Alors Φ_* est bien définie de $D'(X) \to D'(Y)$ et si $f \in L^1_{loc}(X)$, $\Phi_* f$ est aussi $L^1_{loc}(Y)$ et on a $\Phi_* f = j_\Psi \Phi^* f$ avec $\Psi = \Phi^{-1}$.*

Démonstration. $\Phi : X \to Y$ est un difféomorphisme donc propre donc Φ_* est bien définie. On sait que

$$\int_X f\varphi = \int_Y f \circ \Psi \varphi \circ \Psi j_\Psi$$

ie $\langle f, \varphi \rangle = \langle f \circ \Psi, \varphi \circ \Psi j_\Psi \rangle$.
Par définition, $\langle \Phi_* f, \varphi \circ \Psi \rangle = \langle f, \varphi \circ \Psi \circ \Phi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$ donc

$$\langle \Phi_* f, \varphi \circ \Psi \rangle = \langle \Psi^* f, j_\Psi \Psi^* \varphi \rangle = \langle j_\Psi \Psi^* f, \varphi \circ \Psi \rangle$$

Donc $\Phi_* f = j_\Psi \Psi^* f$. ■

Théorème 9.3 *Si $\Phi : X \to Y$ est un difféomorphisme, alors on peut définir l'image réciproque $\Phi^* : D'(Y) \to D'(X)$ qui étend l'image réciproque sur les fonctions et on a*

$$\Phi_* \circ j_\Phi = (\Phi^{-1})^*$$

Démonstration. On voit par le théorème précédent que $\Phi_* : C_0^\infty(X) \to C_0^\infty(Y)$ et on définit $\Phi^* = (\Phi_*|_{C_0^\infty})^T$. ■

Chapitre 10

Convolution des distributions

On note T_a la translation par a. $(T_a\varphi)(x) = \varphi(x-a) = (T_{-a})^*\varphi$.

On note S la symétrie $x \mapsto -x$. $S\varphi = S^*\varphi = (S^{-1})^*\varphi$. On utilise aussi $\check{\varphi} = S\varphi$.

Ainsi, $f * g = \langle f, T_x Sg \rangle$.

10.1 Convolution d'une distribution par une fonction

Définition 10.1 Si $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (ou $u \in \mathcal{E}'$ et $\varphi \in \mathcal{E}$), on note $u * \varphi$ la fonction

$$x \mapsto \langle u, y \mapsto \varphi(x-y) \rangle$$

Exemple 10.1 $(\delta_a * \varphi)(x) = \varphi(x-a) = T_a\varphi(x)$.

Ainsi, $\delta_0 * \varphi = \varphi$.

Théorème 10.1 *Soit $u \in D'$ et $\varphi \in C^\infty$. Si* $\operatorname{supp}(u)$ *compact ou* $\operatorname{supp}\varphi$ *compact alors $u * \varphi \in C^\infty$.*

De plus, $\operatorname{supp}(u * \varphi) \subset \operatorname{supp}(u) + \operatorname{supp}(\varphi)$ *et*

$$\forall a, T_a(u * \varphi) = (T_a u) * \varphi = u * (T_a \varphi)$$

$$\forall \alpha, \partial^\alpha(u * \varphi) = (\partial^\alpha u) * \varphi = u * (\partial^\alpha \varphi)$$

Démonstration. Si $\operatorname{supp}(\varphi)$ est compact (l'autre cas est similaire), l'application $x \mapsto T_x S\varphi$ est continue donc par composition, $u * \varphi$ est continue.

Soit e_j un vecteur de base

$$\frac{1}{t}((u * \varphi)(x + te_j) - (u * \varphi)(x)) = \left\langle u, y \mapsto \frac{\varphi(x + te_j - y) - \varphi(x-y)}{t} \right\rangle$$

Donc par continuité de u,

$$\frac{1}{t}((u*\varphi)(x+te_j)-(u*\varphi)(x)) = \langle u, \partial_j\varphi(x-\cdot)\rangle + o(1)$$

Ainsi, $u*\varphi$ est dérivable et $\partial_j(u*\varphi) = u*\partial_j\varphi$. Ainsi, les dérivées partielles sont continues donc on a la C^1-itude donc par récurrence, la C^∞-tude.

Soit $C = \operatorname{supp}(u) + \operatorname{supp}(\varphi)$. C est fermé (somme d'un fermé et d'un compact). Comme C^c est ouvert, il suffit de montrer que $u*\varphi|_{C^c} = 0$.

Soit $x \notin C$. $x - \operatorname{supp}\varphi$ ne rencontre pas $\operatorname{supp}(u)$ et $x - \operatorname{supp}\varphi = \operatorname{supp}(T_xS\varphi)$ donc $\langle u, T_xS\varphi\rangle = 0$. ∎

10.2 Opérateur de convolution

Théorème 10.2

(i) *Soit $u \in D'$, l'opérateur de convolution $(u*)$ est linéaire continu et commute avec les translations.*

(ii) *Réciproquement, toute application linéaire continue $U : C_0^\infty \to C^\infty$ qui commute avec les translations est un opérateur de convolution. Précisément, il existe un unique u tel que $U = u*$ et $u = \delta_0 \circ U \circ S$.*

Démonstration.

- Continuité : Si K et L sont des compacts, on montre pour tout k l'existence de C telle que $\|u*\varphi\|_{C^k(L)} \leqslant C\|\varphi\|_{C^k(L)}$ pour tout $\varphi \in C_0^\infty(K)$. Si $\varphi_j \to 0$ dans C_0^∞, on a $\|u*\varphi_j\|_{C^k(L)} \to 0$ donc $u*\varphi_j \to 0$ dans $\mathcal{E}$.
- Existence : Posons $u = \delta \circ U \circ S$.

$$\begin{aligned} u*\varphi &= \langle \delta, U\circ S(T_xS\varphi)\rangle = (U(S(T_x(S(\varphi)))))(0) \\ &= (U\circ T_{-x}\varphi)(0) = (T_{-x}\circ U\varphi)(0) = U\varphi \end{aligned}$$

- Unicité : Si $U\varphi = u*\varphi$ alors

$$\langle \delta, U\varphi\rangle = (U\varphi)(0) = \langle u, S\varphi\rangle$$

Donc $\langle \delta\circ U, \varphi\rangle = \langle u, S\varphi\rangle$ donc $\langle \delta U S^{-1}, \varphi\rangle = \langle u, \varphi\rangle$. ∎

10.3 Densité

Lemme 10.2.1

Soit X ouvert de $\mathbb{R}^n$ et A une application telle que pour tout $t \in \mathbb{R}^m$, $A(t) \in C_0^\infty$ et

1. A est nulle en dehors d'un compact
2. les $A(t)$ sont à support dans un compact fixe
3. A est uniformément équicontinue pour toutes les normes C^k.

alors

- $\int_{\mathbb{R}^m} A(t)\,\mathrm{d}t = x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} A(t)(x)\,\mathrm{d}t$ est une fonction $C_0^\infty(X)$.
- Pour tout $u \in D'(X)$, $t \mapsto u \circ A(t)$ est une fonction continue à support compact
- $\langle u, \int A(t)\,\mathrm{d}t\rangle = \int_{\mathbb{R}^m} u \circ A(t)\,\mathrm{d}t$

Remarque 10.1 Si on a une fonction $f(t,x)$ de $C_0^\infty(\mathbb{R}^m \times X)$ alors les conditions précéents sont satisfaites pour $A(t) = f(t,\cdot)$.

Démonstration.

- Dérivation sous l'intégrale
- continuité par (3) et par composition. Support compact par (1).
- On remplace l'intégrale par une somme de Riemann sur un compact. Soit $h > 0$, on pose $S_h = h^m \sum_{t \in \mathbb{Z}^m} A(ht)$.

$$\left\langle u, \int A\right\rangle = \langle u, \lim_{h\to 0} S_h\rangle = \lim_{h \to 0}\langle u, S_h\rangle = \int u \circ A(t)\,\mathrm{d}t$$ ■

<u>THÉORÈME 10.3</u> *Si $u \in D'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ alors*

$$\langle u * \varphi, \psi\rangle = \langle u, S\varphi * \psi\rangle$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\langle u * \varphi, \psi\rangle &= \int \langle u, T_x S\varphi\rangle \psi(x)\,\mathrm{d}x = \int \langle u, \psi(x) T_x S\varphi\rangle\,\mathrm{d}x \\ &= \left\langle u, \int \psi(x) T_x S\varphi\,\mathrm{d}x\right\rangle = \langle u, \psi * S\varphi\rangle\end{aligned}$$

car l'application $A(x) = \psi(x) T_x S\varphi$ vérifie les hypothèses du lemme. ■

<u>THÉORÈME 10.4</u> *Soit X ouvert. $C_0^\infty(X)$ est dense dans $D'(X)$.*

Démonstration. On pose $u_j = (\chi_j u) * \varphi_j \in C_0^\infty$. φ_j est une suite régularisante et χ_j est une partition de l'unité associée à une suite de compacts K_j absorbant X : $d(K_j, X^c) > \frac{1}{j}$.

$$\langle u_j, \psi\rangle = \langle \chi_j u, S\varphi_j * \psi\rangle = \langle u, \chi_j(S\varphi_j) * \psi\rangle$$

Pour j assez grand, K_j contient le support de $S\varphi_j * \psi$ donc $\chi_j(S\varphi_j) * \psi = (S\varphi_j) * \psi$. Donc $\langle u_j, \psi\rangle = \langle u, (S\varphi_j) * \psi\rangle \to \langle u, \psi\rangle$. ■

10.4 Convolution de deux distributions

On a défini $(u*) : D \to \mathcal{E}$ donc on obtient un opérateur $(u*)^t : \mathcal{E}' \to D'$ par

$$\langle (u*)^t v, \varphi \rangle = \langle v, u * \varphi \rangle$$

Or si u est une fonction, on sait que $\langle v, u * \varphi \rangle = \langle v * Su, \varphi \rangle$.

Définition 10.2 Si $u \in D'$ est $v \in \mathcal{E}'$, on définit $u * v \in D'$ par

$$\langle u * v, \varphi \rangle = \langle u, (Sv) * \varphi \rangle$$

où $Sv := S_* v$.

Proposition 10.1

- $\operatorname{supp}(u * v) \subset \operatorname{supp}(u) + \operatorname{supp}(v)$
- $\langle u, (Sv)*\varphi \rangle = \langle v, (Su)*\varphi \rangle$. On peut donc définir $v*u$ et on a $u*v = v*u$.
- Si deux des trois distributions u, v, w sont à support compact, alors $(u * v) * w = u * (v * w)$

Chapitre 11

Transformation de Fourier

11.1 Fourier dans L^1

Définition 11.1 Si $u \in L^1$, on note Fu sa transformée de Fourier la fonction

$$\xi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle} u(x)\,\mathrm{d}x$$

Théorème 11.1 *Si $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors Fu est uniformément continuer et tend vers 0 aux infinis.*

Ainsi, Fu est bornée et $|Fu(\xi)| \leqslant \|u\|_1$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} Fu(\xi) &= -\int \mathrm{e}^{-i\langle x+\frac{\pi\xi}{\|\xi\|^2},\xi\rangle} u(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle} u\left(x - \frac{\pi\xi}{\|\xi\|^2}\right)\,\mathrm{d}x = -F(T_{\frac{\pi\xi}{\|\xi\|^2}} u)(\xi) \end{aligned}$$

On demi-somme :

$$Fu(\xi) = \frac{1}{2} F(u - T_{\frac{\xi\pi}{\|\xi\|^2}} u)(\xi)$$

Si $u \in L^1$ alors $\|u - T_h u\|_1 \to 0$ si $h \to 0$ (utiliser la densité de C_0^0 dans L^1.

Ainsi $|Fu(\xi)| \leqslant \left\| u - T_{\frac{\pi\xi}{\|\xi\|^2}} u \right\|_1 \to 0$ quand $\|\xi\| \to \infty$. ∎

11.2 Fourier dans $\mathcal{E}'$

Définition 11.2 Si $u \in \mathcal{E}'$, on pose $Fu = \xi \mapsto \langle u, \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle}\rangle$.

Lemme 11.1.1
Si $u \in \mathcal{E}'$, Fu est analytique.

Démonstration. On note $e_{-i\xi} = x \mapsto \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle}$.

$\xi \mapsto e_{-i\xi}$ est continue donc Fu est continue. De plus

$$\lim_{t\to 0} \frac{(Fu)(\xi + te_j) - (Fu)(\xi)}{t} = \left\langle u, \lim \frac{e_{i(\xi+te_j)} - e_{i\xi}}{t} \right\rangle$$

qui existe car $\xi \mapsto e_{i\xi}$ est analytique donc dérivable. ∎

Remarque 11.1 L'application $u \mapsto \langle u, e_{-\eta}\rangle$ est la transformée de Laplace.

11.3 Fourier dans l'espace de Schwartz S

Définition 11.3 On dit que φ est à décroissance rapide ssi pour tout β, $x^\beta\varphi(x)$ est bornée.

$\varphi \in S$ ssi $\varphi \in C^\infty$ et toutes ses dérivées sont à décroissance rapide.

Remarque 11.2 $D \subset S \subset \mathcal{E}$ et les injections sont continues.

De plus S est dense dans $\mathcal{E}$.

Définition 11.4 On dit que $\varphi_n \to \varphi$ dans S ssi pour tout α, β,

$$\sup |x^\beta \partial^\alpha(\varphi_n - \varphi)| \to 0$$

Lemme 11.1.2
D est dense dans S. Soit $\chi \in C_0^\infty$, $\chi = 1$ sur $\|x\| < 1$.

Soit $\varepsilon^*\chi = x \mapsto \chi(\varepsilon x)$. Pour tout $\varphi \in S$, $\varphi_\varepsilon := (\varepsilon^*\chi)\varphi \in C_0^\infty$ et converge vers φ dans S.

Démonstration. $\varphi_\varepsilon - \varphi = (\varepsilon^*\chi - 1)\varphi$.

$$\partial^\alpha(\varphi_\varepsilon - \varphi) = (\varepsilon^*\chi - 1)\partial^\alpha\varphi + O(\varepsilon)$$

Or $\|(\varepsilon^*\chi - 1)\partial^\alpha\varphi\| \leqslant \sup\limits_{\varepsilon\|x\|<1} \|\partial^\alpha\varphi\|$. ∎

Lemme 11.1.3
F est une application linéaire continue de $S \to S$. On note $D_j = \frac{1}{i}\partial_j$.

$$F(D_j\varphi)(\xi) = \xi_j F\varphi(\xi) \text{ et } F(x_j\varphi)(\xi) = -D_j F\varphi(\xi)$$

$$F(T_a^*\varphi)(\xi) = (e_{ia}F\varphi)(\xi) \text{ et } F(e_{ia}\varphi)(\xi) = (T_{-a}^*F\varphi)(\xi)$$

11.4 Fourier dans S'

Définition 11.5 On appelle distribution tempérée une forme linéaire continue sur S.

Définition 11.6 On dit que $u_j \to u$ dans S' ssi pour tout $\varphi \in S$, $\langle u_j, \varphi\rangle \to \langle u, \varphi\rangle$.

Remarque 11.3 *Si $u \in \mathcal{E}'$, on peut restreindre u à $S \subset \mathcal{E}$.*

Si $\varphi_j \to 0$ dans S, on a vu que $\varphi_j \to 0$ dans $\mathcal{E}$ donc $\langle u, \varphi_j\rangle \to 0$ donc $u \in S'$.

D'autre part, si $u \in S'$, on peut restreindre u à C_0^∞ et si $\varphi_j \to 0$ dans C_0^∞ alors $\varphi_j \to 0$ dans S' donc $u \in D'$.

Définition 11.7 Si $u \in S'$, on définit $Fu \in S'$ par $\langle Fu, \varphi\rangle = \langle u, F\varphi\rangle$.

F étend la transformation de Fourier sur S.

Théorème 11.2 *Soit u une forme linéaire sur S. Alors $u \in S'$ ssi il existe C, k, N tel que pour tout $\varphi \in S$,*

$$|\langle u, \varphi\rangle| \leqslant C \|\varphi\|_{S(k,N)}$$

Remarque 11.4 $\|\varphi\|_{S(k,N)} = \sup_{x,\beta\leqslant N,\alpha\leqslant k} |x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)|$.

Démonstration.

- $\Leftarrow$ Soit $\varphi_n \to 0$ dans S. Pour tout k, N, $\|\varphi_n\|_{S(k,N)} \to 0$ donc $\langle u, \varphi_n\rangle| \to 0$.
- $\Rightarrow$ Il faut passer par contraposée. ∎

Corollaire 11.1 *Soit $u \in D'(\mathbb{R}^n)$. Alors $u \in S'$ ssi il existe C, k, N tel que pour tout $\varphi \in C_0^\infty$,*

$$|\langle u, \varphi\rangle| \leqslant C \|\varphi\|_{S(k,N)}$$

Démonstration.

- $\Rightarrow$ Si $u \in S'$, on a le résultat pour $\varphi \in S$ donc pour $\varphi \in D$.
- $\Leftarrow$ Soit $\psi \in S$. On pose $\psi_\varepsilon(x) = \chi(\varepsilon x)\psi(x)$ où $\chi \in C_0^\infty$ valant 1 sut $\|x\| < 1$.

  On sait que $\psi_\varepsilon \to \psi$ dans S et on définit $\langle \tilde{u}, \psi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle u, \psi_\varepsilon\rangle$. Cette limite existe car

  $$\langle u, \varphi_\varepsilon - \varphi_{\varepsilon'}\rangle| \leqslant C \|\varphi_\varepsilon - \varphi_{\varepsilon'}\|_{S(k,N)}$$

  Or φ_ε converge dans S donc est de Cauchy, ainsi $\langle u, \varphi_\varepsilon\rangle$ est de Cauchy donc converge. ∎

<u>THÉORÈME 11.3</u> *Pour tout* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $S \subset L^p \subset S'$.

Démonstration. $S \subset L^p$ est claire (décroissance rapide)

Soit $u \in L^p$. On montre que $\langle u, \cdot \rangle$ est bien défini est continue sur S.

C'est bien défini par Hölder. Si $p = \infty$, on veut $\|\varphi\|_1 < \infty$, c'est bon car $\varphi \in S$.

Si $p = 1$, on a $|\langle u, \varphi \rangle| \leqslant \|u\|_1 \|\varphi\|_\infty$, et $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_{S(0,0)}$. Donc u est continue sur S par le théorème.

Si $q < \infty$, on peut écrire $\varphi(x) = (1 + \|x\|)^{-N}(1 + \|x\|)^N \varphi(x)$ donc

$$\|\varphi\|_q \leqslant \left(\int (1 + \|x\|)^{-Nq}\right)^{\frac{1}{q}} \sup |(1 + \|x\|)^N \varphi(x)| < C \|\varphi\|_{S(0,N)}$$

dès que $Nq > n$, ce qu'on a le droit de choisir car N est arbitraire. ∎

Lemme 11.3.1
Si $\varphi, \psi \in S$ alors $\langle \varphi, F\psi \rangle = \langle F\varphi, \psi \rangle$.

Démonstration.

$$\int F\varphi\psi = \iint e^{-i\xi x} \varphi(x)\psi(\xi) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\xi = \iint e^{-ix\xi} \varphi(x)\psi(\xi) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\xi = \int F\psi\varphi \quad ∎$$

<u>**Définition 11.8**</u> Soit $u \in S'$, on définit $Fu \in S'$ par $\langle Fu, \varphi \rangle = \langle u, F\varphi \rangle$ pour tout $\varphi \in S$.

<u>THÉORÈME 11.4</u> $F : S' \to S'$ *étend les transformations* $S \to S$, $L^1 \to C^0$ *et* $E' \to C^\infty$ *analytiques.*

11.5 Inversion de Fourier

<u>THÉORÈME 11.5</u> $F : S \to S$ *est bijective et* $F^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^n} F \circ S = \frac{1}{(2\pi)^n} S \circ F$.

$F : S' \to S'$ *est aussi bijective et on a encore* $FF = (2\pi)^n S$.

Démonstration. Tout repose sur $F1 = (2\pi)^n \delta$.

Soit $v = F1 \in S'$. Pour tout j, $\xi_j v = F(D_j 1) = 0$.

Soit $\varphi \in C_0^\infty$, par Taylor on a $\varphi(\xi) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^{n} \xi_j g_j(\xi)$.

Soit $\chi \in C_0^\infty$ valant 1 sur $\operatorname{supp} \varphi$.

$$\varphi(\xi) = \chi(\xi)\varphi(0) + \sum_{j=1}^{n} \xi_j \chi(\xi) g_j(\xi)$$

Donc $\langle v, \varphi \rangle = \varphi(0)\langle v, \chi \rangle + 0$ donc $v = c\delta$ dans D' donc dans S'. On détermine $c = (2\pi)^n$ avec $\varphi = e^{-\frac{\|\xi\|^2}{2}}$.

Alors

$$(2\pi)^n\varphi(x) = \langle F1, T_x^*\varphi\rangle = \langle 1, FT_x^*\varphi\rangle = \langle 1, e_{ix}F\varphi\rangle = SFF(\varphi)(x)$$

D'où le résultat. On obtient donc les mêmes formules sur S' par transposition. ■

Proposition 11.1 Soit $u \in S'$. Pour tout j, $FD_ju = \xi_jFu$ et $F(x_ju) = -D_jFu$.

<u>THÉORÈME 11.6</u> PARSEVAL *Soit $\varphi, \psi \in S$ alors*

$$\langle \varphi, \overline{\psi}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^n}\langle F\varphi, \overline{F\psi}\rangle$$

Démonstration. $\overline{F\psi} = SF\overline{\psi}$ et

$$\langle F\varphi, \overline{F\psi}\rangle = \langle F\varphi, SF\overline{\psi}\rangle = \langle \varphi, FSF\overline{\psi}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^n}\langle \varphi, \overline{\psi}\rangle$$ ■

11.6 Fourier et convolution

<u>THÉORÈME 11.7</u> *S est stable par Fourier et par convolution : pour tout $\varphi, \psi \in S$,*

$$F(\varphi * \psi) = (F\varphi)(F\psi) \text{ et } F(\varphi\psi) = \frac{1}{(2\pi)^n}(F\varphi) * (F\psi)$$

Chapitre 12

Solutions fondamentales

12.1 EDP linéaires

Définition 12.1 Une équation de la forme $\sum_{|\alpha|\leqslant n} c_\alpha(x)\partial^\alpha u = f$ avec c_α une fonction sur $\mathbb{R}^n$ telle qu'il existe α avec $c_\alpha \neq 0$ est appelée équation aux dérivées partiellles linéaire d'ordre $|\alpha|$ avec second membre f.

On peut l'écrire $P(x,\partial)u = f$ avec $P(x,\partial) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} c_\alpha(x)\partial^\alpha$. P est une opérateur différentiel linéaire.

La fonction

$$(x,\xi) \mapsto \sum_{|\alpha|\leqslant m} c_\alpha(x)(i\xi)^\alpha$$

s'appelle le symbole de l'opérateur P. La fonction $P_m(x,\xi) := \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha(x)(i\xi)^\alpha$ s'appelle le symbole principal de P.

Lemme 12.0.1
Si P est à coefficients constants alors pour tout $u \in S'$, $F(P(\partial)u)(\xi) = P(i\xi)Fu(\xi)$.

12.2 Solutions fondamentales

Définition 12.2 Soit P un opérateur différentiel. On appelle solution fondamentale de P une distribution $E \in D'$ telle que $PE = \delta$.

On dit aussi que E est une fonction de Green de P.

On suppose par la suite que P est à coefficients constants.

Théorème 12.1 *Soit E une solution fondamentale de P. Alors*

- *Pour tout* $f \in \mathcal{E}'$, $P(E * f) = f$
- *Pour tout* $u \in \mathcal{E}'$, $u = E * (Pu)$.

Autrement dit, si on considère l'équation $Pu = f$ alors si f est à support compact, $u = E \times f$ est solution et si la solution u est à support compact elle est unique car $E * P(u) = E * f$.

THÉORÈME 12.2 EHRENPREIS-MALGRANGE *Tout opérateur à coefficients constants admet une solution fondamentale.*

12.3 Laplacien

Définition 12.3 Une distribution $u \in D'(X)$ est dit harmonique ssi $\Delta u = 0$ dans D'.

THÉORÈME 12.3 *Soit E définie pour $x \neq 0$ par*

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2-n)c_n\|x\|^{n-2}} & si\ n \neq 2 \\ \frac{\log\|x\|}{2\pi} & sinon \end{cases}$$

où c_n est le volume de $\mathbb{S}^{n-1}$. Alors $E \in L^1_{loc}$ est c'est une solution fondamentale de Δ

12.4 Opérateur de Cauchy-Riemann $\partial_{\overline{z}}$

Lemme 12.3.1
La fonction $z \mapsto \frac{1}{\pi z} \in L^1_{loc}$ est solution fondamentales de $\partial_{\overline{z}}$.

12.5 Hypoellipticité

Définition 12.4 On dit que P est hypoelliptique sur $\mathbb{R}^n$ ssi pour tout ouvert X et $u \in D'(X)$, le supposrt singulier de Pu est le même que celui de u.

Remarque 12.1 Si $u \in C^\infty(X)$, on a toujours $Pu \in C^\infty(X)$ donc l'inclusion $\subset$ est claire. L'autre dit que si u est solution de $Pu = f$ avec $f \in C^\infty$ alors $u \in C^\infty$.

On peut définir $SSA(u)$ le support singulier analytique (le complémentaire du plus grand ouvert où u est analytique) et l'hypoellipticité analytique : $SSA(Pu) = SSA(u)$.

THÉORÈME 12.4 *Si P admet une solution fondamentale, il est hypoelliptique. Si de plus cette solution est analytique en dehors de 0 alors P est analytiquement hypoelliptique.*

Démonstration. Si $u \in \mathcal{E}'$, $u = \delta * u = (PE) * u = E * (Pu)$ donc $SS(u) \subset SS(E) + SS(Pu) \subset SS(Pu)$.

Si $u \in D'$, on la remplace par χu. ■

COROLLAIRE 12.1

(i) *Toute distribution harmonique est analytique.*

(ii) *Toute solution de Cauchy-Riemann est analytique.*

(iii) *Si $f \in C^\infty$, toute solution de $\Delta u = f$ est C^∞.*

