

# Équations différentielles et phénomènes de transport

Pierron Théo

ENS Ker Lann



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale aux EDP</b>	<b>1</b>
1.1	Définition et classification . . . . .	1
1.2	Exemples de résolution . . . . .	2
1.2.1	Cas hyperbolique . . . . .	2
1.2.2	Cas parabolique . . . . .	4
1.2.3	Cas elliptique . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Résolution des EDO – quelques rappels</b>	<b>7</b>
2.1	Existence et unicité . . . . .	7
2.2	Variante de Cauchy-Lipschitz . . . . .	8
2.3	Dépendance par rapport aux données . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Résolution numérique des EDO</b>	<b>13</b>
<b>4</b>	<b>Résolution des équations de transport</b>	<b>19</b>
4.1	Cas régulier . . . . .	19
4.1.1	Présentation . . . . .	19
4.1.2	Méthode des caractéristiques . . . . .	20
4.1.3	Dimension supérieure . . . . .	23
4.1.4	Autre calcul . . . . .	24
4.2	Solutions peu régulières . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Résolution numérique des équations de transport</b>	<b>31</b>
5.1	Parentèle culturelle . . . . .	38
<b>6</b>	<b>Petit florilège</b>	<b>41</b>



# Chapitre 1

## Introduction générale aux EDP

### 1.1 Définition et classification

**Définition 1.1** Une équation différentielle ordinaire (EDO) est une équation du type  $y'(t) = f(t, y(t))$  où  $t \in \mathbb{R}$  avec  $y(t) \in \mathbb{R}^n$ .

**THÉORÈME 1.1** Si  $f$  est gentille, il y a toujours une unique solution  $y$  à

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

De plus, la solution  $y(t)$  dépend continûment de  $y_0$ .

**Définition 1.2** Les EDP sont des équations d'inconnue  $u(t, x) \in \mathbb{R}^n$  avec  $t \in \mathbb{R}$  et  $x \in \mathbb{R}^d$  qui s'écrit sous la forme d'une relation pas forcément linéaire entre toutes les dérivées partielles de  $u$  par rapport à toutes les variables.

*Remarque 1.1* Les EDO sont des EDP avec  $d = 0$ .

**THÉORÈME 1.2** Il n'y a aucun théorème général comme Cauchy-Lipschitz pour les EDP.

Par conséquent, pour chaque équation, on doit étudier :

- L'existence de solutions
- L'unicité
- La stabilité par rapport aux paramètres
- Les approximations numériques
- Les propriétés qualitatives

Il existe une classification de certaines EDP :

- les équations hyperboliques :  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  (équation des ondes)
- les équations paraboliques :  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \Delta_x(t, x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x, t)$  (équation de la chaleur)

- les équations elliptiques :  $\pm \Delta_x V(x) = \rho(x)$  ( $V$  potentiel,  $\rho$  densité de masse connue)
- les autres :  $i \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x) = \Delta_x \psi(t, x)$  (Schrödinger)

## 1.2 Exemples de résolution

### 1.2.1 Cas hyperbolique

1.  $\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = 0$  avec  $u(0, x) = u_0(x)$  connue. Méthode des caractéristiques : on change de variables via  $v(t, x) = u(t, x + ct)$ .

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, x + ct) + c \frac{\partial u}{\partial x}(t, x + ct) = 0$$

On a donc  $\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) = 0$  et  $v(0, x) = u(0, x) = u_0(x)$ . Donc  $v(t, x)$  est indépendant de  $t$  donc  $v(t, x) = u_0(x)$  pour tout  $(t, x)$ .

On trouve alors  $u(t, x) = v(t, x - ct) = u_0(x - ct)$ .

On aimerait prolonger ce résultat pour  $u$  seulement  $C^0$  ou  $L^p$ , on va devoir parler de solution faible.

On remarque aussi que  $u$  a la même régularité que  $u_0$ . Il n'y a pas d'effet de régularisation. On conserve même la norme  $p$ .

2.  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$  avec  $u(0, x) = u_0(x)$  et  $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u_1(x)$ .

On a envie de passer par des matrices mais la forme habituelle ne marche pas! Try again.

On va poser  $U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix}$ .

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \\ c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_2}{\partial x} \\ c^2 \frac{\partial U_1}{\partial x} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 & 0 \end{pmatrix}}_A \frac{\partial U}{\partial x}$$

On se retrouve donc avec  $\frac{\partial U}{\partial t} = A \frac{\partial U}{\partial x}$  avec  $U(0, x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x}(x) \\ u_1(x) \end{pmatrix} = U_0(x)$ .

En posant  $v = cU_1 + U_2$  et  $w = cU_1 - U_2$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial U_2}{\partial t} = \frac{\partial U_2}{\partial x} + c^2 \frac{\partial U_1}{\partial x} = c \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -c \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} v(t, x) &= v(0, x + ct) = cU_1(0, x + ct) + U_2(0, x + ct) \\ &= c \frac{\partial u_0}{\partial x}(x + ct) + u_1(x + ct) \end{aligned}$$

et

$$w(t, x) = c \frac{\partial u_0}{\partial x}(x + ct) - u_1(x + ct)$$

Ainsi,

$$u(t, x) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y) dy + \frac{u_0(x + ct) + u_0(x - ct)}{2}$$

On retrouve, comme dans le cas précédent : la propagation à vitesse finie. On n'a pas non plus de (dé)régularisation. On peut aussi avoir des solutions faibles dans le cas où  $u_0$  ou  $u_1$  ne sont pas dérivables. Il y a aussi réversibilité en temps de l'équation.

*Remarque 1.2* On a transformé l'équation de départ en un système du premier ordre de la forme :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

On peut se poser la question de résoudre un système de cette forme selon la diagonalisabilité de  $A$  :

1. Si  $A \in \Delta_n(\mathbb{R})$ . On écrit  $A = PDP^{-1}$  avec  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . On change d'inconnue via  $V = P^{-1}U$ .

Le système devient

$$\frac{\partial V}{\partial t} + D \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

avec  $V(0, x) = P^{-1}U_0 = (V_{1,0}, \dots, V_{n,0})$ . On a donc  $n$  équations de transport découplées associées aux vitesses  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

$U(t, x)$  ressemble donc à une somme de signaux qui se déplacent à vitesses  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

2. Si  $A \in \Delta_n(\mathbb{C}) \setminus \Delta_n(\mathbb{R})$ . On voit que ça marche beaucoup moins bien, par exemple avec :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + i \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

On écrirait bien  $u(t, x) = u_0(x - it)$ , ce qui ne veut pas dire grand chose.

Plus mathématiquement, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int |u(t, x)|^2 dx \right) &= 2\Re \left( \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \bar{u}(t, x) dx \right) \\ &= -2\Re \left( i \int \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \bar{u}(t, x) dx \right) \\ &\stackrel{IPP}{=} 2\Re \left( i \int u(t, x) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(t, x) dx \right) \\ &= -2\Re \left( i \int \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \bar{u}(t, x) dx \right) \end{aligned}$$

On a tourné en rond. Or, quand on fait pareil avec un  $c \in \mathbb{R}$  à la place de  $i$ , on n'a pas de  $-$  à la dernière ligne, on prouve que la norme 2 de  $u$  est constante au cours du temps.

On peut alors se demander ce qui se passe au niveau de la norme  $L^2$  dans l'équation avec  $i$ . On introduit pour cela  $\hat{u}(t, \xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u(t, x) dx$ .

On a alors  $\widehat{\frac{\partial u}{\partial x}}(t, \xi) = i\xi \hat{u}(t, \xi)$ . En chapeautant l'équation de départ, on a :

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t, \xi) - \xi \hat{u}(t, \xi) = 0$$

C'est une EDO donc on trouve  $\hat{u}(t, \xi) = \hat{u}(0, \xi) e^{t\xi}$ .

On a  $\|\hat{u}(t, \xi)\|_{L^2(d\xi)}^2 = C \|u(t, x)\|_{L^2(dx)}^2$  ( $C$  une constante avec des  $\pi$  très certainement).

Or  $\|\hat{u}(t, \xi)\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}(0, \xi)|^2 e^{2t\xi} d\xi$ . Gros problème de convergence pour  $\xi \rightarrow +\infty$ . La norme  $L^2$  n'est plus conservée (sauf hypothèse ultra-contrainante) !

3. Dans le cas d'un bloc de Jordan de dimension non nulle, on aura une croissance polynômiale de la norme  $L^2$ , donc on arrive au même point.

On aboutit à la définition suivante :

**Définition 1.3** Le système

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

est dit hyperbolique lorsque  $A \in \Delta_n(\mathbb{R})$ .

### 1.2.2 Cas parabolique

On s'intéresse à l'équation  $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x u$  avec  $u(0, x) = u_0(x)$ .



## 1.2. EXEMPLES DE RÉOLUTION

---

On réutilise le transformée de Fourier :  $\widehat{u}(t, \xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x, \xi \rangle} u(t, x) dx$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(t, \xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x, \xi \rangle} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x, \xi \rangle} \Delta_x u(t, x) dx \\ &= \sum_{k=1}^d -\xi_k^2 \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x, \xi \rangle} u(t, x) dx \\ &= -\|\xi\|_2^2 \widehat{u}(t, \xi) \end{aligned}$$

C'est une EDO en  $t$  paramétrée par  $\xi$  donc  $\widehat{u}(t, \xi) = e^{-t\|\xi\|_2^2} \widehat{u}_0(t, \xi)$ .

On trouve :

$$u(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy$$

Et on a une vitesse infinie de propagation : dès que  $t > 0$ , en tout  $x$ , la température varie en  $x$ .

On constate aussi que même si  $u_0$  est seulement continue et  $L^\infty$  on sait que  $u(t, x) \in C^\infty$  dès que  $t > 0$ . De plus, on a décroissance des normes  $L^p$  (par Hölder). En fait, la norme  $p$  tend vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$ . C'est de plus un processus irréversible en temps (changement de signe de la gaussienne).

### 1.2.3 Cas elliptique

On s'intéresse à  $\pm \Delta_x V(x) = \rho(x)$  avec  $\rho$  connu. On sait qu'en dimension 3,  $V(x) = \pm c \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{|x-y|} dy$  et qu'en dimension 2,  $V(x) = \pm c \int_{\mathbb{R}^2} \rho(y) \ln|x-y| dy$ .

On a encore « propagation à vitesse infinie » : dès qu'on a une masse, le potentiel est changé partout dans l'espace, même si  $\rho$  est nulle en dehors d'une boule.

Si  $\rho$  est  $C^0$  et a des conditions d'intégrabilité correctes,  $V$  est  $C^1$ .



# Chapitre 2

## Résolution des EDO – quelques rappels

Toute EDO peut s'écrire :

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

avec  $y(t) \in \mathbb{R}^n$ .

### 2.1 Existence et unicité

**THÉORÈME 2.1** CAUCHY-LIPSCHITZ GLOBAL *Si  $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue, globalement lipschitzienne en  $y$ , alors il existe une unique solution  $y \in C^1$  de l'équation.*

*Démonstration.* On interprète l'équation comme une équation de point fixe, on montre que  $\Phi : y \mapsto y_0 + \int_0^t f(s, y(s)) ds$  est une contraction sur l'espace des fonctions continues de  $I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , muni de la norme  $\|y\|_L = \sup_t e^{-2Lt} |y(t)|$  :

$$\begin{aligned} |\Phi(y_1)(t) - \Phi(y_2)(t)| &\leq \int_0^t |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| ds \\ &\leq L \int_0^t \|y_1 - y_2\| e^{2Ls} ds \\ &\leq \|y_1 - y_2\| \frac{e^{2Lt} - 1}{2} \leq \frac{\|y_1 - y_2\|}{2} \end{aligned}$$

On a donc l'existence et l'unicité de la solution. ■

*Remarque 2.1* Pour résoudre l'équation, on a utilisé la condition de Lipschitzianité. Quel rôle profond joue cette condition ? Celle est une condition sur les variations de  $f$  qui cache une condition de stabilité.

Si on prend deux solutions  $y_1$  et  $y_2$  pour deux conditions initiales différentes, on a :

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq |y_1 - y_2| + L \int_0^t |y_1(s) - y_2(s)| ds$$

Par Gronwall, on a  $|y_1(t) - y_2(t)| \leq |y_1 - y_2|e^{Lt}$ .

On voit que  $L$  apparaît à travers le facteur  $e^{Lt}$ , comme l'exposant qui caractérise la divergence entre les deux courbes  $y_1$  et  $y_2$ . Or, si  $f$  est  $C^1$ ,  $L$  est le sup de sa dérivée et on retrouve que ce sont les variations de  $f$  qui pilotent les variations de  $y_1 \mapsto y_1(t)$ . C'est un fait naturel (penser à la formule de changement de variables).

## 2.2 Variantes de Cauchy-Lipschitz

**THÉORÈME 2.2** CAUCHY-LIPSCHITZ LOCAL Si  $f$  est continue et localement lipschitzienne par rapport à  $y$ , il existe un intervalle maximal  $I_{\max} = ]t_{\min}, t_{\max}[$  sur lequel il existe une unique solution de l'EDO

**THÉORÈME 2.3** Sous les conditions précédentes, dans le cas  $I = \mathbb{R}$ , et si  $t_{\max} \neq \infty$ , alors  $y$  n'est pas bornée en  $t_{\max}$ .

**Exemple 2.1**  $y' = y^2$ .  $f$  est  $C^1$  donc localement lipschitzienne (mais pas globalement). Par séparation des variables,  $y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - t}$ , d'où une explosion en temps fini.

Si on rajoute un pauvre petit signe  $-$  :  $y' = -y^2$ , on a  $y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} + t}$ .

**THÉORÈME 2.4** CAUCHY-PÉANO Si  $f$  n'est que continue, il existe une solution pour toute condition initiale.

*Remarque 2.2* Cette solution n'est sans doute pas unique.

**Exemple 2.2**  $y' = 2\sqrt{|y|}$  et  $y(0) = 0$ .

$f$  est continue mais pas localement lipschitzienne en 0. Une famille de solutions est

$$y_{c,d}(t) = \begin{cases} (t - c)^2 & \text{si } t \geq c \\ 0 & \text{si } d \leq t \leq c \\ -(d - t)^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

*Démonstration.* On prend une suite  $f_n$  de fonctions  $C^\infty$  qui convergent vers  $f$ . On associe à cette suite une suite de solutions à  $y' = f_n(t, y)$ .  $y_n$  converge-t-elle ?

Les ingrédients clés sont la bornitude de  $y_n$  sur tout compact et le fait que  $y_n$  soit solution de l'équation associée à  $f_n$ . De plus (Ascoli), on a l'uniforme équicontinuité de la suite  $y_n$  (découle de  $|y'_n(t)| = |f_n(t, y_n(t))| \leq C_{\text{indep de } n \text{ et } t}$  donc il existe une sous-suite qui converge simplement vers  $y \in C^0$ . ■

## 2.3 Dépendance par rapport aux données

Notons  $\phi(t, y_0)$  le flot de l'EDO  $y' = f(t, y)$  avec  $y(0) = y_0$  ie qu'on a :

$$\phi(0, y_0) = y_0 \text{ et } \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, y_0) = f(t, \phi(t, y_0))$$

ie que  $\phi(t, y_0)$  est la valeur à l'instant  $t$  de la solution de  $y' = f(t, y)$  partant de la donnée initiale  $y_0$ . On a vu que si  $f$  est globalement lipschitzienne sur  $I \times \mathbb{R}^n$ ,  $\phi$  est définie sur  $I \times \mathbb{R}^n$ . On a aussi vu que

$$|\phi(t, y_0) - \phi(t, y_1)| \leq e^{tL}|y_1 - y_0|$$

**THÉORÈME 2.5** *Si  $f$  est  $C^k$  sur  $I \times \mathbb{R}^n$  alors  $\phi$  l'est aussi.*

*Remarque 2.3* *Si on résout une famille d'EDO indicée par  $\lambda$  et si  $(\lambda, t, y) \mapsto f_\lambda$  est  $C^k$  alors  $(\lambda, t, y) \mapsto \phi_\lambda(t, y)$  est aussi  $C^k$ .*

Que vaut  $\frac{\partial \phi}{\partial y}(t, y)$  ?

On a une EDO simple sur  $\frac{\partial \phi}{\partial y}$  :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(0, y) = \text{Id} \text{ et } \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial y}(t, y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, \phi(t, y)) \frac{\partial \phi}{\partial y}(t, y)$$

Ainsi, en notant  $A(t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial y}(t, y)$  et  $B(t) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, \phi(t, y))$ , on a une équation LINÉAIRE de la forme

$$A'(t) = B(t)A(t)$$

Par conséquent, soit  $g$  une fonction donnée (régulière). Que vaut  $I(t) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\phi(t, x)) dx$  ?

On pose  $y = \phi(t, x)$  dans l'intégrale. On sait que  $x \mapsto \phi(t, x)$  est bijective (quand  $f$  est continue et globalement lipschitzienne).

On sait pose  $\phi(s, t, x)$  la formule générale du flot (origine des temps à  $t = s$ ). On a  $\phi(t_2, t_3, \phi(t_1, t_2, x)) = \phi(t_1, t_3, x)$  et  $\phi(t_2, t_1, \phi(t_1, t_2, x)) = x$ . D'où l'inverse de  $x \mapsto \phi(t_1, t_2, x)$  est  $x \mapsto \phi(t_2, t_1, x)$ .

Dans le problème de départ, on a

$$I(t) = \int g(\phi(0, t, x)) dx = \int g(y) \left| \det \frac{\partial \phi}{\partial y}(t, 0, y) \right| dy$$

Posons alors  $J(s, t, y) = \det \frac{\partial \phi}{\partial y}(s, t, y)$ .

**Proposition 2.1** On a  $\frac{\partial J}{\partial t}(s, t, y) = (\operatorname{div}_y f)(t, \phi(s, t, y))J(s, t, y)$  où

$$(\operatorname{div}_y f)(t, y) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_i}(t, y) = \operatorname{tr} \left( \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right)$$

Comme  $J(s, s, y) = 1$ , on en déduit que

$$J(s, t, y) = \exp \left( \int_s^t (\operatorname{div}_y f)(u, \phi(s, u, y)) du \right)$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial t}(s, t, y) &= \frac{\partial}{\partial t} \det \left( \frac{\partial \phi}{\partial y}(s, t, y) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \det \left( \frac{\partial \phi}{\partial y}(s, t, y) \right)^t \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \det(\nabla_y \phi_1, \dots, \nabla_y \phi_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \det \left( \nabla_y \phi_1, \dots, \nabla_y \phi_{i-1}, \frac{\partial \nabla_y \phi_i}{\partial t}, \nabla_y \phi_{i+1}, \dots, \nabla_y \phi_n \right) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nabla_y \phi_i}{\partial t} &= \nabla_y \frac{\partial \phi_i}{\partial t} = \nabla_y f_i(t, \phi(s, t, y)) = \left( \sum_{l=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_l}(t, \phi(s, t, y)) \frac{\partial \phi_l}{\partial y_k}(s, t, y) \right)_k \\ &= \sum_{l=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_l} \nabla_y \phi_l \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial t}(s, t, y) &= \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_l} \det(\nabla_y \phi_1, \dots, \nabla_y \phi_{i-1}, \nabla_y \phi_l, \nabla_y \phi_{i+1}, \dots, \nabla_y \phi_n) \\ &= J(s, t, y) \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_i} \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

On a donc

$$I(t) = \int g(y) \exp \left( \int_t^0 (\operatorname{div}_y f)(u, \phi(t, u, y)) \, du \right) \, dy$$

En particulier,

$$\begin{aligned} \|g(\phi(0, t, y))\|_1 &\leq \|g\|_1 \exp \left( \int_0^t \sup_y |\operatorname{div}_y f(u, y)| \, du \right) \\ &\leq \|g\|_1 \exp \left( \int_0^t \|(\operatorname{div}_y f)(u, v)\|_\infty \, du \right) \end{aligned}$$

(norme infinie finie car  $f$  est globalement lipschitzienne et  $C^1$  donc bornées par  $nL$ )





# Chapitre 3

## Résolution numérique des EDO

On veut résoudre numériquement  $y' = f(t, y)$ . On découpe  $[0, t]$  en un échantillonnage  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = t$  et on calcule des valeurs approchées des quantités  $y(t_k)$  notées  $y_k$ .

Par la suite on supposera avoir une subdivision régulière. On va écrire  $y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s)) ds$  et on cherche à approcher l'intégrale par des formules de quadratures basées sur l'échantillonnage  $t_0, \dots, t_n$ . On obtient à terme un schéma numérique.

### Exemple 3.1

- Euler explicite :  $y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$  et  $y_0 = y_0$ .
- Euler implicite :  $y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1})$ .
- Euler point milieu :  $y_{k+1} = y_k + hf(\frac{t_k+t_{k+1}}{2}, \frac{y_k+y_{k+1}}{2})$ .

Que donnent ces schémas pour  $y' = iy$ ? Euler explicite donne une spirale divergente (trajectoire rouge). Euler implicite donne une spirale convergente (trajectoire bleue) et le point milieu est représenté en vert.

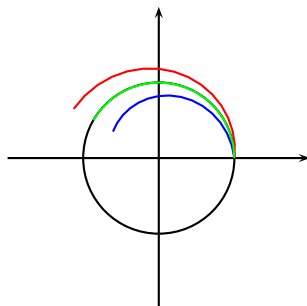


FIGURE 3.1 – Méthodes d'approximation sur  $y' = iy$

Les schémas d'Euler explicite et implicite sont d'ordre 1 (repose sur un DL d'ordre 1).

Le schéma d'Euler point milieu est d'ordre 2. Mais la qualité de schéma d'Euler point milieu pour l'équation  $y' = iy$  n'est pas à chercher du côté de l'ordre. En effet, pour Euler explicite :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) = y_n + ihy_n = (1 + ih)y_n$$

Donc  $|y_n| = |(1 + ih)^n y_0| \rightarrow +\infty$

Pour Euler implicite, on a

$$y_{n+1} = y_n + ihy_{n+1}$$

donc  $|y_n| = \frac{|y_0|}{|1 - ih|^n} \rightarrow 0$  car  $|1 - ih| > 1$ .

En revanche, pour Euler point milieu :

$$y_{n+1} = y_n + ih \frac{y_n + y_{n+1}}{2} = \frac{1 + i\frac{h}{2}}{1 - i\frac{h}{2}} y_n$$

Donc  $y_n = \left(\frac{1 + i\frac{h}{2}}{1 - i\frac{h}{2}}\right)^n y_0$

On a donc  $|y_n| = |y_0|$ .

**Définition 3.1** On appelle schéma à un pas (pour l'EDO  $y' = f(t, y)$ ), toute formule du type

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(t_n, y_n, h)$$

pour une certaine fonction  $\phi$  (éventuellement connue de manière implicite)

**Exemple 3.2** Euler explicite est un schéma à un pas. Pour Euler implicite, on a :  $y_{n+1} = u_n + hf(t_n + h, y_{n+1})$ .

$y_{n+1}$  est donc une solution de l'équation d'inconnue  $z$  :

$$z - (y_n + hf(t_n + h, z)) = 0$$

Ceci définit-il un schéma ?

Soit  $F(h, z, t_n, y_n) = z - y_n - hf(t_n + h, z)$ . Si  $f$  est régulière,  $F$  aussi. On veut résoudre  $F(h, z, t_n, h_n) = 0$  par rapport à  $z$ . De plus,  $F(0, y_n, t_n, y_n) = 0$  et  $\frac{\partial F}{\partial z}(0, y_n, t_n, y_n) = \text{Id}$  qui est inversible.

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction  $\psi$  régulière telle que pour  $h > 0$  petit et pour  $z$  proche de  $y_n$ , l'équation implicite  $z - (y_n + hf(t_n + h, z)) = 0$  est équivalente à  $z = \psi(t_n, y_n, h)$ .

Le  $y_{n+1}$  recherché vaut donc  $\psi(t_n, y_n, h)$ . Or  $\psi$  est régulière donc

$$\psi(t_n, y_n, h) = \psi(t_n, y_n, 0) + h \int_0^1 \frac{\partial \psi}{\partial h}(t_n, y_n, sh) ds$$

D'où  $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n, h)$  avec  $\phi$  régulière.

---

*Remarque 3.1* Si  $f$  est de régularité supérieure, on peut faire un DL à un ordre plus élevé, et on peut écrire que :

- $y_{n+1} = y_n + hf(y_{n+1}) = y_n + O(h)$  car  $y_{n+1}$ , fonction de  $h$ , varie continûment avec  $h$ . On a  $f(y_{n+1}) = O(1)$ .
- $y_{n+1} = y_n + hf(y_n + O(h)) = y_n + hf(y_n) + O(h^2)$
- On a enfin :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf(y_n + hf(y_n) + O(h^2)) \\ &= y_n + h(f(y_n) + (hf(y_n) + O(h^2))f'(y_n) + O(h^2)) \\ &= y_n + h(f(y_n) + hf(y_n)f'(y_n) + O(h^2)) \\ &= y_n + hf(y_n) + h^2f(y_n)f'(y_n) + O(h^3) \end{aligned}$$

Le schéma d'Euler implicite est bien un schéma à un pas. De plus, on peut obtenir des DL de  $y_{n+1}$  en fonction de  $h$  à tout ordre si nécessaire. On montre de même que le schéma d'Euler point milieu est un schéma à un pas.

**Définition 3.2** L'ordre d'un schéma à un pas est le plus grand entier  $p$  tel que pour tout  $f$  régulière et  $y$  solution régulière de  $y' = f(t, y)$ , on ait  $y(t+h) = y(t) + hf(t, y(t), h) + O(h^{p+1})$ .

**Exemple 3.3**

- Euler explicite :  $y(t+h) - y(t) - hf(t, y(t)) = 0$ .

$$y(t+h) - y(t) - hf(t, y(t)) = hy'(t) + \frac{h^2}{2}y''(t) + O(h^3) - hf(t, y(t))$$

Or

$$\begin{aligned} (f(t, y(t)))' &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))y'(t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))f(t, y(t)) \end{aligned}$$

D'où  $y(t+h) - y(t) - hf(t, y(t)) = \frac{h^2}{2}(\frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))f(t, y(t))) + O(h^3) = O(h^2)$ .

Comme  $\frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))f(t, y(t)) \neq 0$  pour  $f$  arbitraire, le schéma d'Euler explicite est d'ordre 1.

- Euler point milieu :  $y(t+h) - y(t) - hf(t + \frac{h}{2}, \frac{y(t)+y(t+h)}{2}) = O(h^{p+1})$  ?

On a :

$$\begin{aligned}
 & y(t+h) - y(t) - hf\left(t + \frac{h}{2}, \frac{y(t) + y(t+h)}{2}\right) \\
 &= hy'(t) + \frac{h^2}{2}y''(t) + O(h^3) - h\left(f\left(t + \frac{h}{2}, y(t) + \frac{h}{2}y'(t) + O(h^2)\right)\right) \\
 &= \left(hf + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}f\right) - h\left(f + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y}f\right)\right)(t, y(t)) + O(h^3) \\
 &= O(h^3)
 \end{aligned}$$

car tout se simplifie.

Euler point milieu est (au moins) d'ordre 2. En fait, il est exactement d'ordre 2.

**Définition 3.3** Un schéma est dit consistant (ou consistant d'ordre  $p$ ) quand il est d'ordre  $p \geq 1$ .

**Définition 3.4** Un schéma à un pas est stable ssi il existe  $M > 0$  indépendante de  $h$  telle que le schéma perturbé

$$z_{n+1} = z_n + h\phi(t_n, z_n, h) + \varepsilon_n$$

satisfait  $\max_{n \in [0, N]} \|y_n - z_n\| \leq M \left( \|y_0 - z_0\| + \sum_{n=0}^{N-1} \|\varepsilon_n\| \right)$  où  $t_N = Nh = T$  et on cherche à résoudre l'équation différentielle sur  $[0, T]$ .

**THÉORÈME 3.1** *Un schéma stable et consistant est convergent au sens où  $\max_n \|y_n - y(t_n)\| \leq Ch^p$  avec  $C$  indépendante de  $h$ .*

*Démonstration.* Supposons le schéma stable et consistant. Posons  $\varepsilon_n$  l'erreur de troncature (ou erreur locale) égale à  $y(t_{n+1}) - y(t_n) - h\phi(y(t_n), t_n, h)$ .

On a  $\varepsilon_n = O(h^{p+1})$  par hypothèse de consistance. En fait, il existe  $C$  telle que pour tout  $n$ ,  $\|\varepsilon_n\| \leq Ch^{p+1}$  (uniformité en  $n$ ). En effet,  $C$  ne dépend pas de  $n$  : on sait que  $\varepsilon_n(h)$  vérifie  $\varepsilon_n(0) = 0$ ,  $\varepsilon_n'(0) = 0$ ,  $\dots$ ,  $\varepsilon_n^{(p)}(0) = 0$ . Mais  $\varepsilon_n$  est une somme de trucs bornées, de même que toutes ses dérivées en  $h$ . On écrit Taylor et on a que  $\varepsilon_n(h) = Kh^{p+1}$  avec  $K$  borné indépendamment de  $n$  et  $h$ .

La stabilité assure que  $\max_n |y_n - y(t_n)| \leq M \left( \|y_0 - y(0)\| + \sum_{n=1}^N \|\varepsilon_n\| \right)$ .

Donc

$$\max_{n \in [0, N]} |y_n - y(t_n)| \leq MC \sum_{n=1}^N h^{p+1} \leq MCN h^{p+1} = MCT h^p \quad \blacksquare$$

---

**Proposition 3.1** Soit un schéma  $y_{n+1} = y_n + h\phi(t_n, y_n, h)$ .

Si  $\phi$  est lipschitzien au sens où pour tout  $K$  compact de  $\mathbb{R}^N$  et tout  $T$ , il existe  $C$  indépendante de  $h$  telle que pour tout  $h$  petit,  $t \in [0, T]$  et  $(y, z) \in K \times K$ ,  $\|\phi(t, y, h) - \phi(t, z, h)\| \leq C \|y - z\|$ , alors le schéma est stable.

*Démonstration.* On pose  $y_{n+1} = y_n + h\phi(t_n, y_n, h)$  et  $z_{n+1} = z_n + h\phi(t_n, y_n, h) + \varepsilon_n$ . Alors

$$\begin{aligned}\|y_{n+1} - z_{n+1}\| &\leq \|y_n - z_n\| + h \|\phi(t_n, y_n, h) - \phi(t_n, z_n, h)\| + \|\varepsilon_n\| \\ &\leq \|y_n - z_n\| + Ch \|y_n - z_n\| + \|\varepsilon_n\| \\ &\leq (1 + Ch) \|y_n - z_n\| + \|\varepsilon_n\| \\ &\leq (1 + Ch)^{n+1} \|y_0 - z_0\| + \sum_{i=1}^n \|\varepsilon_i\| (1 + Ch)^{n-i}\end{aligned}$$

Or  $n \leq \frac{T}{h}$  donc  $(1 + Ch)^n \leq (1 + Ch)^{\frac{T}{h}} \rightarrow e^{CT}$ . Ainsi,

$$\|y_n - z_n\| \leq e^{CT} \left( \|y_0 - z_0\| + \sum_{i=1}^{n-1} \|\varepsilon_i\| \right) \quad \blacksquare$$

*Remarque 3.2* Pourquoi c'est dans un compact fixe ? Il faudrait couper des  $\varepsilon$  en  $\frac{\ln(\pi)}{e^2}$ , mais c'est enquinant. Voilà l'idée : on prend  $y(t)$  la solution de  $y' = f(t, y(t))$  avec  $f$  globalement lipschitzienne.  $y$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  (en particulier, bornée). On a donc  $y_n \approx y(t_n)$  est borné sur  $[0, N]$  donc  $z_n$ , par l'estimation précédente, est borné.



# Chapitre 4

## Résolution des équations de transport

### 4.1 Cas régulier

#### 4.1.1 Présentation

On veut résoudre

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + a(t, s)\nabla_x f(t, x) & = 0 \\ f(0, x) & = f_0(x) \end{cases}$$

où  $f$  est l'inconnue,  $f_0$  connue et  $C^1$  et  $t \in \mathbb{R}$  et  $x \in \mathbb{R}^d$ .

$a$  est un champ de vecteurs  $C^1$  et  $a(t, s)\nabla_x f(t, x) = \sum_{i=1}^d a_i(t, s) \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x)$ .

**Exemple 4.1** En dimension 1, cette équation devient  $\frac{\partial f}{\partial t} + a_1(t, x)\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = 0$ .

En dimension 2, on a

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x, y) + a_1(t, x, y)\frac{\partial f}{\partial x}(t, x, y) + a_2(t, x, y)\frac{\partial f}{\partial y}(t, x, y) = 0$$

On s'apprête à résoudre des EDP linéaires d'ordre 1 à coefficients variables (normalisées) avec une donnée initiale en 0. C'est donc un problème de Cauchy.

On cherche à calculer une évolution à partir de  $t = 0$ , mais pas une propagation à partir de  $x_1 = 0$ .

On suppose que  $a$  est  $C^1$  et que  $\|\nabla_x a(t, x)\| \leq C$  pour tout  $x, t$ . Autrement, dit  $a$  est globalement lipschitzienne en  $x$ .

### 4.1.2 Méthode des caractéristiques

Soit  $X_s^t(x) = \phi(s, t, x)$  le flot de l'EDO associée au champ de vecteurs  $a$ , ie la solution

$$\begin{cases} \frac{\partial X_s^t}{\partial t}(x) &= a(t, X_s^t(x)) \\ X_s^s(x) &= x \end{cases}$$

Vu les hypothèses sur  $a$ ,  $X_s^t(x)$  est défini de manière unique pour tout  $s, x, t$  puisque  $a \in C^1$  est globalement lipschitzienne.

Changeons de fonctions inconnues et posons  $g(t, x) = f(t, X_0^t(x))$  ie  $g$  est  $f$  calculée en  $t$  et au point obtenu en résolvant l'équation en partant de la donnée  $x$  en  $t = 0$ .

Calculons  $\frac{\partial g}{\partial t}(t, x)$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) &= \frac{\partial f(t, X_0^t(x))}{\partial t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_0^t) + \sum_{j=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_j}(t, X_0^t(x)) \frac{\partial (X_0^t(x))_j}{\partial t} \end{aligned}$$

Or  $\frac{\partial X_0^t(x)}{\partial x} = a(t, X_0^t(x))$  donc

$$\forall j, \frac{\partial (X_0^t(x))_j}{\partial t} = a_j(t, X_0^t(x))$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_0^t(x)) + \sum_{j=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_k}(t, X_0^t(x)) a_j(t, X_0^t(x)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_0^t) + (a \cdot \nabla_x f)(t, X_0^t(x)) \\ &= \underbrace{\left( \frac{\partial f}{\partial t} + a \nabla_x f \right)}_{=0}(t, X_0^t(x)) \end{aligned}$$

Donc pour tout  $t, x$ ,  $\frac{\partial g}{\partial t}(t, x) = 0$ .

Là où  $f$  choisit une EDP, grâce à la dérivation des fonctions composées et à l'EDO satisfaite par  $X_0^t(x)$ , on aboutit au fait que  $g$  satisfait une EDO.

On a donc  $g(t, x) = g(0, x) = f(0, x) = f_0(x)$ . Autrement dit,  $f$  est constante le long des courbes caractéristiques.

Prenons maintenant  $(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ . On a  $f(t, y) = f(t, X_0^t(X_t^0(y)))$  et par bijectivité du flot,  $f_0(X_t^0(y)) = f(t, y)$  donc  $f(t, x) = f_0$  nécessairement.



## 4.1. CAS RÉGULIER

---

Réciproquement, posons  $f(t, x) = f_0(X_t^0(x))$ . Vérifions que  $f$  est solution du problème. On a bien  $f(0, x) = f_0(X_0^0(x)) = f_0(x)$ .

De plus,  $(t, x) \mapsto X_t^0(x)$  est  $C^1$  donc  $f$  est  $C^1$ . On calcule enfin  $\frac{\partial f}{\partial t}$  :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial f_0(X_t^0(x))}{\partial t} = \nabla_x f_0(X_t^0(x)) \frac{\partial X_t^0(x)}{\partial t}$$

De même,

$$\begin{aligned} a(t, x) \nabla_x f(t, x) &= a(t, x) \nabla_x (f_0(X_t^0(x))) \\ &= a(t, x) \left( \frac{\partial X_t^0(x)}{\partial x} \right)^T (\nabla_x f_0)(X_t^0(x)) \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_j}(X_t^0(x)) = \sum_{k=1}^d \frac{\partial f_0}{\partial x_k} \frac{\partial (X_t^0(x))_k}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^d (\nabla f_0) \left( \frac{\partial X_t^0}{\partial x} \right)_{k,j}$$

et

$$\nabla_x f_0(X_t^0(x)) = \left( \frac{\partial X_t^0}{\partial x} \right)^T \nabla f_0$$

En conclusion, on a

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + a(t, x) \nabla_x f(t, x) = (\nabla_x f_0)(X_t^0(x)) \frac{\partial X_t^0}{\partial t}(x) \quad (1)$$

$$+ a(t, x) \left( \left( \frac{\partial X_t^0}{\partial x} \right)^T (x) (\nabla_x f_0)(X_t^0(x)) \right) \quad (2)$$

$$= \left\langle \nabla_x f_0(X_t^0(x)), \frac{\partial X_t^0(x)}{\partial t} + \frac{\partial X_t^0(x)}{\partial x} a(t, x) \right\rangle$$

Or (1) vaut  $\langle \nabla_x f_0(X_t^0(x)), \frac{\partial X_t^0}{\partial t}(x) \rangle$  et, comme  $\langle u, Av \rangle = \langle v, A^T u \rangle$ , (2) vaut  $\langle a(t, x), \left( \frac{\partial X_t^0}{\partial x}(x) \right)^T \nabla_x f_0(X_t^0(x)) \rangle$ . On pose

$$W(s, t, x) = \frac{\partial X_t^s}{\partial t}(x) + \frac{\partial X_t^s}{\partial x}(x) a(t, x)$$

On a, pour tout  $s$ ,  $X_s^s(x) = x = X_s^t(x)|_{s=t}$ . Donc

$$\frac{\partial X_t^s(x)}{\partial s} + \frac{\partial X_t^s(x)|_{s=t}}{\partial t} = 0$$

Ainsi,

$$\left. \frac{\partial X_t^s(x)}{\partial t} \right|_{t=s} = - \frac{\partial X_t^s(x)|_{s=t}}{\partial s} = -a(s, X_t^s(x))$$

De plus,

$$\left. \frac{\partial X_t^s(x)}{\partial x} a(t, x) \right|_{s=t} = \frac{\partial X_s^s(x)}{\partial x} a(t, x) = a(t, x)$$

Donc  $W(s, s, x) = 0$ .

De plus

$$X_t^s(x) = x + \int_t^s a(\tau, X_t^\tau(x)) d\tau$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_t^s(x)}{\partial x} &= \text{Id} + \int_t^s \frac{\partial a}{\partial x}(\tau, X_t^\tau(x)) \frac{\partial X_t^\tau(x)}{\partial t} d\tau \\ \frac{\partial X_t^s(x)}{\partial x} &= \int_t^s \frac{\partial a}{\partial x}(\tau, X_t^\tau(x)) \frac{\partial X_t^\tau(x)}{\partial t} d\tau - a(t, x) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} W(s, t, x) &= \frac{\partial X_t^s(x)}{\partial t} + \frac{\partial X_t^s(x)}{\partial x} a(t, x) \\ &= \int_t^s \frac{\partial a}{\partial x}(\tau, X_t^\tau(x)) \frac{\partial X_t^\tau(x)}{\partial t} d\tau + \int_t^s \frac{\partial a}{\partial x}(\tau, X_t^\tau(x)) \frac{\partial X_t^\tau(x)}{\partial x} a(t, x) d\tau \\ &= \int_t^s \frac{\partial a}{\partial x}(\tau, X_t^\tau(x)) W(\tau, t, x) d\tau \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|W(s, t, x)\| &\leq \int_t^s \left\| \frac{\partial a}{\partial x}(\tau, X_t^\tau(x)) W(\tau, t, x) \right\| d\tau \\ &\leq \int_t^s \left\| \frac{\partial a}{\partial x}(\tau, X_t^\tau(x)) \right\| \|W\| d\tau \\ &\leq C \int_t^s \|W(\tau, t, x)\| d\tau \end{aligned}$$

où  $C$  est indépendante de  $\tau, t, x$ . Par Gronwall,  $\|W\| = 0$ .

Autre preuve : On a  $f(t, x) = f_0(X_t^0(x))$  donc  $f(t, X_0^t(x)) = f_0(x)$ . Alors :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f(t, X_0^t(x))}{\partial t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_0^t(x)) + \nabla_x f(t, X_0^t(x)) \underbrace{\frac{\partial X_0^t(x)}{\partial t}}_{=a(t, X_0^t(x))} \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial t} + a \nabla_x f \right) (t, X_0^t(x)) \end{aligned}$$

Donc pour tout  $t, y$ ,

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} + a \nabla_x f \right) (t, y) = 0$$

### 4.1.3 Dimension supérieure

On veut résoudre

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + a(t, x) \nabla_x f(t, x) + b(t, x) f(t, x) = c(t, x)$$

avec  $f(0, x) = f_0(x)$ ,  $a \in C^1$ ,  $\frac{\partial a}{\partial x}$  bornée,  $b, c \in C^1$ ,  $f \in C^1$  l'inconnue et  $f_0 \in C^1$ .

Si  $f$  est solution, on pose  $g(t, x) = f(t, X_0^t(x))$  où on introduit le flot de  $y' = a(t, y)$  à travers

$$\frac{\partial X_s^t(x)}{\partial t} = a(t, X_s^t(x)) \text{ et } X_s^s(x) = x$$

On a

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_0^t) + \underbrace{\frac{\partial X_0^t}{\partial t}(x) (\nabla_x f)(t, X_0^t(x))}_{\text{opérateur de transport}} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + a \nabla_x f \right) (t, X_0^t)$$

Donc

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t, x) = (c - bf)(t, X_0^t(x)) = c(t, X_0^t(x)) - b(t, X_0^t(x))g(t, x)$$

qui est une EDO de la forme  $y' = -by + c$ . On trouve alors la solution

$$g(t, x) = g(0, x) \exp\left(-\int_0^t b(s, X_0^s) ds\right) + \int_0^t c(s, X_0^s(x)) \exp\left(-\int_s^t b(\tau, X_0^\tau(x)) d\tau\right) ds$$

Donc

$$\begin{aligned} f(t, y) &= g(t, X_t^0(y)) \\ &= f_0(X_t^0(y)) \exp\left(-\int_0^t b(s, X_t^s(y)) ds\right) \\ &\quad + \int_0^t c(s, X_t^s(y)) \exp\left(-\int_s^t b(\tau, X_t^\tau(y)) d\tau\right) ds \end{aligned}$$

*Remarque 4.1* Dans l'équation  $\frac{\partial f}{\partial t} + a\nabla_x f + bf + c$  on voit que

- $a$  est un terme de transport (associé à  $X_0^t$ )
- $b$  est un terme d'absorption (typiquement :  $b \geq 0 \Rightarrow f$  décroît (exponentiellement) en  $t$ )
- $c$  est un terme source (typiquement :  $c \geq 0 \Rightarrow f$  croît (linéairement) en  $t$ )

#### 4.1.4 Autre calcul

On veut calculer  $\|f(t, x)\|_p = \left( \int |f(t, x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$  pour  $f$  une solution de

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a\nabla_x f = 0$$

avec  $f(0, x) = f_0(x) \in C_c^1$ .

Mettons que  $f \geq 0$ . C'est vrai puisque  $f(t, x) = f_0(X_t^0(x)) \geq 0$  dès lors que  $f_0 \geq 0$ . De plus,  $f(t, x) = f_0(X_t^0(x))$  est intégrable car à support compact car elle est nulle dès que  $|X_t^0(x)| \geq R$  (avec  $R > 0$ ).

Pour  $t$  fixé,  $X_0^t(B(0, R))$  est compact car image d'un compact par la fonction continue  $y \mapsto X_0^t(y)$ . On a

$$\int |f(t, x)|^p dx = \int |f_0(X_t^0(x))|^p dx = \int |f_0(y)|^p J(t, y) dy$$

(changement de variables  $y = X_t^0(x)$ ).

On a vu que  $\frac{\partial J}{\partial t}(t, y) = (\operatorname{div}_x a)(t, X_0^t(y))J(t, y)$  et  $J(0, y) = 1$ .

On a donc

$$0 \leq J(t, y) \leq \exp \left( t \sup_{s \in [0, t], x \in \mathbb{R}^d} (\operatorname{div}_x a(s, x)) \right)$$

En posant  $A(t) = \sup_{[0, t] \times \mathbb{R}^d} (\operatorname{div}_x a(s, x))$ , on a

$$\|f(t, x)\|_p \leq \|f_0\|_p e^{\frac{t}{p} A(t)}$$

On retrouve ici quantitativement le propos qualitatif selon lequel c'est  $\operatorname{div} a$  qui pilote la manière donc l'élément de volume augment (ou diminue) avec le flot de l'EDO  $y' = a(t, y)$ .

En particulier, si  $\operatorname{div} a(t, x) = 0$  pour tout  $t, x$ , on a  $\|f(t, x)\|_p \leq \|f_0\|_p$ .

Retrouvons ce résultat par une méthode EDP. On écrit

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a\nabla_x f = 0$$

et

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \left( \int |f(t, x)|^p dx \right) &= \int \frac{\partial f(t, x)^p}{\partial t} dx = \int p \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) f(t, x)^{p-1} dx \\
 &= -p \int a \nabla f(t, x) f(t, x)^{p-1} dx \\
 &= -p \sum_{i=1}^d \int a_i(t, x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x) f(t, x)^{p-1} dx \\
 &= - \sum_{i=1}^d \int a_i(t, x) \frac{\partial (f(t, x))^p}{\partial x_i} dx
 \end{aligned}$$

*Remarque 4.2* Soit  $\Omega$  un ouvert régulier. On a alors

$$\int_{\Omega} f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) g(x) dx + \int_{\partial \Omega} f(x) g(x) n_i(x) d\sigma(x)$$

où  $d\sigma$  est la mesure de surface euclidienne sur  $\partial \Omega$ , et  $n(x)$  le vecteur unitaire normal sortant en  $x$ .

On obtient alors

$$\begin{aligned}
 \int a_i(t, x) \frac{\partial (f(t, x))^p}{\partial x_i} dx &= - \int_{B(0, 2R)} a_i(t, x) \frac{\partial f(t, x)^p}{\partial x_i} dx \\
 &= \int_{B(0, 2R)} \frac{\partial a_i}{\partial x_i}(t, x) (f(t, x))^p dx - \int_{S(0, 2R)} a_i(t, x) \underbrace{(f(t, x))^p}_{=0} n_i(x) d\sigma(x) \\
 &= \int_{B(0, 2R)} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} f^p = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} f^p
 \end{aligned}$$

car  $f$  est à support compact.

Résultat des courses :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \int f(t, x)^p dx &= \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} (\operatorname{div}_x a)(t, x) f(t, x)^p dx \\
 &\leq \underbrace{\sup_{[0, t] \times \mathbb{R}^d} (\operatorname{div}_x a(s, x))}_{A(t)} \int f(t, x)^p dx
 \end{aligned}$$

Par Gronwall, on obtient

$$\int f(t, x)^p dx \leq \int f_0(x)^p dx e^{tA(t)}$$

D'où le résultat.

## 4.2 Solutions peu régulières

Ici on suppose  $a \in C^1$  avec  $\frac{\partial a}{\partial t}$  bornée. On part du fait que  $f(t, x) = f_0(X_t^0(x))$  a encore un sens si  $f_0 \in L^p$  pour  $1 \leq p < +\infty$ . et dans ce cas,  $f(t, x) \in L^p(dx)$ .

Peut-on définir directement sur l'EDP une notion de solution « faible » de  $\frac{\partial f}{\partial t} + a\nabla_x f = 0$  quand  $f$  n'a qu'une régularité de type  $L^p$ ? L'idée est que si  $f \in C_c^\infty$  est solution de  $\frac{\partial f}{\partial t} + a\nabla_x f = 0$  avec  $f(0, x) = f_0(x)$ , au lieu de dire que pour tout  $x, t$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + a(t, x)\nabla_x f(x, t) = 0$$

on dit que pour tout  $\varphi \in C_c^\infty$ ,

$$\iint \left( \frac{\partial f}{\partial t} + a\nabla_x f \right) (t, x)\varphi(t, x) dx dt = 0$$

Plus précisément, soit  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ . On écrit

$$\begin{aligned} 0 &= \iint \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^d a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (t, x)\varphi(t, x) dx dt \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial t} \varphi dx dt + \sum_{i=1}^d \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi dx dt \\ &\stackrel{\text{Fubini} + \text{IPP}}{=} - \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^\infty f \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt - f(0, x)\varphi(0, x) dx - \sum_{i=1}^d \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} f \frac{\partial a_i \varphi}{\partial x_i} dx dt \\ &= - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} f \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial a_i \varphi}{\partial x_i} \right) dx dt - \int f_0(x)\varphi(0, x) dx \end{aligned}$$

Donc  $f$  est une solution  $C^1$  alors pour tout  $\varphi \in C_c^\infty$ , on a

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} f \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div}_x(a\varphi) \right) dx dt = - \int_{\mathbb{R}^d} f_0(x)\varphi(0, x) dx$$

**Définition 4.1** On suppose  $a(t, x) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$  et qu'il existe  $c$  tel que pour tout  $t, x$ ,  $|\frac{\partial a}{\partial x}(t, x)| \leq c$ .

On prend  $f^0 \in L^1_{\text{loc}}$ . Soit  $f \in L^1_{\text{loc}}$ . On dit que  $f(t, x)$  est solution faible de  $\frac{\partial f}{\partial t} + a\nabla_x f = 0$  avec  $f(0, x) = f_0(x)$  quand pour tout  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ , on a

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} f \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div}_x(a\varphi) \right) dx dt = - \int_{\mathbb{R}^d} f_0(x)\varphi(0, x) dx$$

## 4.2. SOLUTIONS PEU RÉGULIÈRES

---

**THÉORÈME 4.1** *Si  $f \in C^1$  est solution faible alors  $f$  est solution classique.*

*Démonstration.*

1. Soit  $\varphi \in C_c^\infty([0, +\infty[ \times \mathbb{R}^d)$ . On a

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} f \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}_x(a\varphi) \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}^d} f_0(x)\varphi(0, x) dx \\
 &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} f \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}_x(a\varphi) \right) dx dt \\
 &= - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)\varphi(t, x) dx dt - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} (a\varphi)(t, x)\nabla_x f(t, x) dx dt \\
 &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\left( \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + a(t, x)\nabla_x f(t, x) \right)}_{g(t, x) \in C^0} \varphi(t, x) dx dt
 \end{aligned}$$

Donc pour tout  $\varphi$ ,  $\iint g\varphi = 0$  donc  $g = 0$  p.s. donc partout par continuité.

2. Soit  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ . Soit  $\varphi \in C_c^\infty([0, +\infty[ \times \mathbb{R}^d)$  tel que  $\varphi(0, x) = \psi(x)$ . On a

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}_x(a\varphi) \right) (t, x) dx dt + \int f_0(x)\varphi(0, x) dx \\
 &= - \int_0^\infty \int \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)\varphi(t, x) dx dt - \int f(0, x)\varphi(0, x) dx \\
 &\quad - \int_0^\infty \int \nabla_x f(t, x)a(t, x)\varphi(t, x) dx dt + \int f_0(x)\varphi(0, x) dx \\
 &= - \int_0^\infty \int \underbrace{\left( \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + a(t, x)\nabla_x f(t, x) \right)}_{=0} \varphi(t, x) dx dt \\
 &\quad + \int (f_0(x) - f(0, x))\varphi(0, x) dx
 \end{aligned}$$

Donc pour tout  $\psi \in C_c^\infty$  :

$$\int (f_0(x) - f(0, x))\psi(x) dx = 0$$

donc pour tout  $x$ ,  $f(0, x) = f_0(x)$ . ■

**THÉORÈME 4.2** *Soit  $a \in C^1$  globalement lipschitzienne sur  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ . Soit  $f_0 \in L^1_{loc}$ . Alors il existe une unique solution faible à*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a\nabla_x f = 0$$

avec  $f(0, x) = f_0$ , notée  $f(t, x) \in L^1_{loc}$ . De plus on a  $f(t, x) = f_0(X_t^0(x))$  pour presque tout  $t, x$ .

*Remarque 4.3* On a vu que

$$\forall t \geq 0, \int_K |f_0(X_t^0(x))| dx \leq C_K e^{tA(t)}$$

Donc  $(t, x) \mapsto f_0(X_t^0(x)) \in L^1_{loc}$ . En fait,  $t \mapsto (x \mapsto f_0(X_t^0(x)))$  appartient à  $C^0(\mathbb{R}^+, L^1_{loc}(\mathbb{R}^d))$ .

*Démonstration.*

$\exists$  Vérifions que  $f(t, x) = f_0(X_t^0(x))$  est solution faible. Soit  $\varphi(t, x) \in C_c^\infty$ .  
Calculons

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int f_0(X_t^0(x)) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(a\varphi) \right) (t, x) dx dt \\ &= \int_0^\infty \int f_0(x) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(a\varphi) \right) (t, X_0^t(x)) \det \left( \frac{\partial X_0^t}{\partial t}(x) \right) dx dt \end{aligned}$$

Or

$$\frac{\partial \varphi(t, X_0^t(x))}{\partial t} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + a \nabla_x \varphi \right) (t, X_0^t(x))$$

De plus  $\operatorname{div}_x(a\varphi) = a \nabla_x \varphi + \varphi \operatorname{div}_x a$  et  $|\det(\frac{\partial X_0^t}{\partial t})| = J(t, x)$ . Donc la machin qu'on calcule vaut :

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int f_0(x) \left( \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + a \nabla_x \varphi \right) + (\operatorname{div}_x a) \varphi \right) (t, X_0^t(x)) J(t, x) dx dt \\ &= \int_0^\infty \int f_0(x) \frac{\partial \varphi(t, X_0^t(x))}{\partial t} J(t, x) dx dt \\ & \quad + \int_0^\infty \int f_0(x) (\varphi \operatorname{div}_x a)(t, X_0^t(x)) J(t, x) dx dt \\ & \stackrel{IPP}{=} - \int f_0(x) \varphi(0, x) J(0, x) dx - \int_0^\infty \int f_0(x) \varphi(t, X_0^t(x)) \frac{\partial J}{\partial t}(t, x) dx dt \\ & \quad + \int_0^\infty \int f_0(x) (\varphi \operatorname{div}_x a)(t, X_0^t(x)) J(t, x) dx dt \end{aligned}$$

Or  $\frac{\partial J}{\partial t}(t, x) = (\operatorname{div}_x a)(t, X_0^t(x)) J(t, x)$  et  $J(0, x) = 1$  donc finalement

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int f_0(X_t^0(x)) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(a\varphi) \right) (t, x) dx dt \\ &= - \int f_0(x) \varphi(0, x) dx \end{aligned}$$



! On aimerait écrire  $\frac{\partial f}{\partial t} + a \nabla_x f = 0$ . On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int |f(t, x)|^2 dx &= 2 \int f \frac{\partial f}{\partial t} dx = -2 \int f a \nabla_x f dx \\ &= - \int a \nabla_x f^2 = \int (\operatorname{div} a)^2 f \leq c \int f^2 \end{aligned}$$

Donc  $\int |f(t, x)|^2 dx \leq e^{ct} \int |f_0(x)|^2 dx$ .

Il suffit de montrer que  $f = 0$  si  $f_0 = 0$  et d'écrire ce qui précède pour une suite de  $f_n$  régulières qui converge vers  $f$  et on fait  $n \rightarrow +\infty$ . Cependant, on rencontre des difficultés liées au passage à la limite et aussi parce qu'on travaille dans  $L^1_{\text{loc}}$ .

On part de la définition : pour tout  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ ,

$$\int_0^\infty \int f \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}_x(a\varphi) \right) dx dt = - \int f_0(x) \varphi(0, x) dx$$

Il suffit, par linéarité de montrer que  $f = 0$  dès que  $f_0 = 0$ . On part donc de

$$\forall \varphi, \iint f \underbrace{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(a\varphi) \right)}_{=\psi} = 0$$

On a gagné si pour tout  $\psi \in C_c^\infty$ , il existe  $\varphi \in C_c^\infty$  tel que  $\psi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(a\varphi) = \psi$  (voir  $\operatorname{Ker}(A) = (\operatorname{Im} A^*)^\perp$  avec  $A$  l'opérateur  $\partial_t + \operatorname{div}(a \cdot)$ ). Soit dès lors  $\psi \in C_c^\infty$ . Posons  $T$  tel que  $\operatorname{supp}(\psi) \subset ]0, T[ \times \mathbb{R}^d$ . Résolvons alors l'équation en  $\varphi$  suivante :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(a\varphi) = \psi$$

avec  $\varphi(T) = 0$ .

On a  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + a \nabla_x \varphi + (\operatorname{div}_x a) \varphi = \psi$  ie

$$\frac{\partial \varphi(t, X_T^t(x))}{\partial t} + ((\operatorname{div} a) \varphi)(t, X_T^t(x)) = \psi(t, X_T^t(x))$$

D'où, par variation de la constante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \varphi(t, X_T^t(x)) \exp \left( \int_T^t (\operatorname{div} a)(s, X_T^s(x)) ds \right) \right) \\ = \psi(t, X_T^t(x)) \exp \left( \int_T^t \operatorname{div}(s, X_T^s(x)) ds \right) \end{aligned}$$

On trouve in fine

$$\varphi(t, X_T^t(x)) = \int_T^t \psi(s, X_T^s(x)) \exp \left( \int_t^s (\operatorname{div} a)(\tau, X_T^\tau(x)) d\tau \right) ds$$

On récupère alors l'expression de  $\varphi$  en posant  $y = X_T^t(x)$ .  
 Cette fonction  $\varphi$ -là vérifie  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(a\varphi) = \psi$  avec  $\varphi(T) = 0$ .  
 On veut écrire  $0 = \iint f(t, x)\psi \, dx \, dt$ . C'est vrai si  $\varphi \in C_c^\infty$ .  
 $\varphi$  est à support compact car, pour tout  $t \geq T$ , et pour tout  $y$ ,  $\psi(s, y) = 0$  donc le support en temps de  $\varphi$  est inclus dans  $[0, T]$ .  
 On sait aussi que  $\psi(s, X_T^s(x)) = 0$  dès que  $X_T^s(x) \notin B(0, R)$  pour un certain  $R > 0$  (tel que  $\operatorname{supp}(\psi) \subset [0, T] \times B(0, R)$ ). Or  $\{X_s^t(B(0, R)), t \in [0, T], s \in [0, T]\}$  est un compact inclus dans  $B(0, \tilde{R})$ .  
 $\varphi$  est-elle  $C^\infty$ ? Pour l'instant on sait seulement  $C^1$  car le flot  $X_t^s(x)$  est  $C^1$ . Il n'est pas garanti qu'on puisse écrire

$$\iint f(t, x) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(a\varphi) \right) \, dx \, dt = 0$$

Or  $\varphi \in C^1$  est limite de  $\varphi_n \in C_c^\infty$  (limite en topologie  $C_c^1$ ). On a donc

$$\begin{aligned} 0 &= \iint f(t, x) \left( \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} + \operatorname{div}(a\varphi_n) \right) \, dx \, dt \\ &= \iint_{K \text{ compact fixé}} f(t, x) \left( \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} + \operatorname{div}(a\varphi_n) \right) \, dt \, dx \end{aligned}$$

En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on trouve bien le résultat.

Donc  $\iint f\psi \, dt \, dx = 0$  pour tout  $\psi \in C_c^\infty$  donc  $f = 0$ . ■

*Remarque 4.4* Dans l'esprit, la démarche a plus ou moins consisté à écrire

$$\iint |f|^2 \, dt \, dx = \iint f f \, dt \, dx = \iint f \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(a\varphi) \right) \, dt \, dx$$

quitte à choisir  $\varphi$  tel que  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(a\varphi) = f$ .

# Chapitre 5

## Résolution numérique des équations de transport

En gros, résoudre  $\frac{\partial F}{\partial t} + a(t, x)\nabla_x f(t, x) = 0$  est équivalent à résoudre  $\dot{X} = a(t, X)$  via  $f(t, x) = f_0(X_t^0(x))$ .

On passe d'une équation linéaire en dimension infinie à une équation non linéaire en dimension finie.

Que peut-on dire des schémas sur la première équation ?

On prend une subdivision  $t_n = n\delta_t$  et  $x_j = j\delta_x$  où  $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$  avec  $N\delta_t = T$  et  $j \in \mathbb{Z}$ . On veut calculer des valeurs approchées de  $f(t_n, x_j)$  noté  $f_j^n$ . Ceci constitue un choix volontaire. On cherche ici un schéma aux différences finies.

On pourrait aussi chercher (dans l'esprit solution faible) des valeurs approchées de  $\int_{[t_n, t_{n+1}] \times [x_j, x_{j+1}]}^f (t, x) dt dx$ . On ferait alors le choix d'un schéma au volume fini.

Un autre choix serait de dire qu'on cherche  $F(t, x)$  tel que pour tout  $\varphi \in C^1$ , on ait

$$\iint F \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(a\varphi) \right) = \int f^0 \varphi(0, x) dx$$

et chercher un espace  $V$  de dimensions finie et une fonction  $\tilde{f}(t, x) \in V^*$  (à préciser) tel que pour tout  $\varphi \in V$ ,

$$\iint \tilde{f} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(a\varphi) \right) = \int f^0 \varphi(0, x)$$

Écrire cette équation revient, en notant  $\tilde{f} = \sum_{\text{finie}} \alpha_i \psi_i$  ( $\psi_j$  base de  $V^*$ ) et

## CHAPITRE 5. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE TRANSPORT

---

$\varphi = \sum_{\text{finie}} \beta_j w_j$  avec  $w_j$  base de  $V$ , à écrire : pour tout  $B_0, B_1, \dots$ ,

$$\sum_{j,p} \alpha_j \beta_p \underbrace{\iint \psi_j \left( \frac{\partial w_p}{\partial t} + \operatorname{div}(aw_p) \right)}_{\text{connu}} = \underbrace{\int f^0 \varphi(0, x) dx}_{\text{connu}}$$

ie un système linéaire. Ceci constitue la recherche d'un schéma aux éléments finis.

Avec le point de vue différences finies, il est naturel d'écrire le schéma suivant :

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\delta_t} + a(t_n, x_j) \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{\delta_x} = 0$$

avec  $f_j^0 = f_0(x_j)$ . On a alors

$$f_j^{n+1} = f_j^n + \frac{\delta_t}{\delta_x} a(t_n, x_j) (f_j^n - f_{j+1}^n)$$

La connaissance de  $F_j^0$  pour tout  $j$  donne accès à celle de  $f_j^n$  pour tout  $n, j$ .

On pourrait aussi écrire

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\delta_t} + a(t_n, x_j) \frac{F_j^n - F_{j-1}^n}{\delta_x} = 0$$

Ou alors, dans le style point milieu :

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\delta_t} + a(t_n, x_j) \frac{f_{j+1}^n - f_{j-1}^n}{2\delta_x} = 0$$

**Exemple 5.1** Le cas  $a = 1$ . On résout  $\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$  de solution  $f^0(x - t)$ .

Avec le premier schéma (décentré à droite, downwind), il y a des oscillations et un changement de signe de  $f$ .

Avec le troisième (centré), il se passe le même phénomène.

Avec le deuxième (décentré à gauche, upwind), si  $\delta_x < \delta_t$ , on a aussi le même phénomène. Sinon, on a un résultat fidèle.

Comment programmer en pratique ces schémas ?

- Première solution : condition aux limites nulles.

On se place sur  $[-L, L]$  avec  $L$  grand. On discrétise et on pose la formule du cas upwind. Ce choix est valide quand on sait que  $f(t, x)$  est négligeable pour  $x \leq -L$  et  $t \leq T$ . Ceci est « vrai » quand  $f^0(x)$  est petit pour  $x \leq -L$  et  $T \max(-a) \ll L$ .

- Deuxième solution : Conditions aux limites périodiques.

On raisonne sur  $[-L, L]$  périodisé. On pose alors  $f_{j+1}^n = f_{1-j}^n$  et  $f_{-j-1}^n = f_{j-1}^n$  pour tout  $n$ , avec les mêmes conditions de validité que ce qui précède.

Il existe aussi des conditions aux limites absorbantes ou transparentes.

Un schéma aux différences finies avec  $a$  constante est noté

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \delta_t \phi((u_k^n)_k, \delta_x, \delta_t)_j^n$$

**Définition 5.1** On dit que le schéma ci-dessus est d'ordre  $p$  en espace et  $q$  en temps ssi pour tout  $u$  solution régulière de  $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ , on a

$$\frac{u(t^n + \delta_t, x_j) - u(t^n, x_j)}{\delta_t} - \Phi((u(t_n, x_k))_k, \delta_x, \delta_t)_j^n = O(\delta_x^p + \delta_t^q)$$

**Exemple 5.2 Cas du schéma upwind** Soit  $u$  régulière solution de  $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  avec  $a > 0$ . On calcule

$$\begin{aligned} & \frac{u(t^{n+1}, x_j) - u(t^n, x_j)}{\delta_t} + a \frac{u(t^n, x_j) - u(t^n, x_{j-1})}{\delta_x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\delta_t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\delta_t^2) + a \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\delta_x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\delta_x^2) \right) \\ &= \frac{\delta_t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t^n, x_j) - \frac{a \delta_x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t^n, x_j) + O(\delta_x^2 + \delta_t^2) \\ &= \frac{a}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t^n, x_j) (a \delta_t - \delta_x) + O(\delta_t^2 + \delta_x^2) \\ &= O(\delta_x + \delta_t) \end{aligned}$$

Donc le schéma est d'ordre 1 en temps et en espace. De plus le premier terme correctif est  $\frac{a}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t^n, x_j) (a \delta_t - \delta_x)$  avec (on verra)  $\delta_x \geq a \delta_t$ .

On pense à l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} + a \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{a \delta_t}{2} \left( a - \frac{\delta_x}{\delta_t} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Supposons qu'il existe une fonction régulière  $v(t, x)$  telle que pour tout  $n, j$ ,  $u_j^n = v(t_n, x_j)$ . ( $v$  indépendante de  $\delta_t$  et  $\delta_x$  et interpole des  $u_j^n$ ). Nécessairement,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{v(t_{n+1}, x_j) - v(t^n, x_j)}{\delta_t} + a \frac{v(t^n, x_j) - v(t^n, x_{j-1})}{\delta_x} \\ &= \left( \frac{\partial v}{\partial t} + a \frac{\partial v}{\partial x} \right) (t^n, x_j) + \left( \frac{\delta_t}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a \frac{\delta_x}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) (t^n, x_j) + O(\delta_x^2 + \delta_t^2) \end{aligned}$$

## CHAPITRE 5. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE TRANSPORT

---

En particulier, pour tout  $n, j$ ,

$$\left( \frac{\partial v}{\partial t} + a \frac{\partial v}{\partial x} \right) (t_n, x_j) = O(\delta_x + \delta_t)$$

Comme  $v$  est indépendant de  $\delta_t$  et  $\delta_x$ , en faisant  $\delta_t \rightarrow 0$  et  $\delta_x \rightarrow 0$ , on récupère

$$\forall t, x, \left( \frac{\partial v}{\partial t} + a \frac{\partial v}{\partial x} \right) (t, x) = O(\delta_t + \delta_x)$$

Donc  $v$  est solution de l'équation de transport à  $O(\delta_t + \delta_x)$  près. De plus

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( -a \frac{\partial v}{\partial x} + O(\delta_t + \delta_x) \right) \\ &= -a \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} + O(\delta_t + \delta_x) = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + O(\delta_t + \delta_x) \end{aligned}$$

(on a bien le droit de dériver les  $O$ , mais il conviendrait de vérifier que cette égalité est vraie en topologie  $C^1$ )

Donc

$$0 = \frac{\partial v}{\partial t} + a \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{a\delta_t}{2} \left( a - \frac{\delta_x}{\delta_t} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + O(\delta_t^2 + \delta_x^2)$$

Soit finalement

$$\frac{\partial v}{\partial t} + a \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{a\delta_t}{2} \left( \frac{\delta_x}{\delta_t} - a \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + O(\delta_t^2 + \delta_x^2)$$

Cette équation satisfaite par  $v$  s'appelle l'équation modifiée (associée au schéma numérique choisi pour l'équation de transport qu'on souhaite discrétiser). Ici elle est écrite à l'ordre 2. De plus, c'est l'équation de transport perturbée par un terme de diffusion (avec le bon signe) proportionnel à  $\delta_t(a - \frac{\delta_x}{\delta_t})$ . Ceci explique le comportement diffusif du schéma upwind, d'autant plus fort que  $\frac{\delta_x}{\delta_t}$  est grand. On parle de diffusion numérique.

**Exemple 5.3 Cas du schéma downwind** Il est d'ordre 1 aussi en  $t, x$ . L'équation modifiée qui lui est associée est

$$\frac{\partial v}{\partial t} + a \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{a\delta_t}{2} \left( a - \frac{\delta_x}{\delta_t} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + O(\delta_t^2 + \delta_x^2)$$

qui a un comportement antidiffusif.

---

**Exemple 5.4 Cas du schéma centré** Évidemment, il est d'ordre 2 en  $x$  et 1 en  $t$ .

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{v(t_{n+1}, x_j) - v(t_n, x_j)}{\delta_t} + a \frac{v(t_n, x_{j+1}) - v(t_n, x_{j-1})}{2\delta_x} \\
&= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\delta_t}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\delta_t^2}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial t^3} + a \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\delta_x^2}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right) + O(\delta_t^3 + \delta_x^2) \\
&= \frac{\partial v}{\partial t} + a \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\delta_t}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{1}{6} \left( \delta_t^2 \frac{\partial^3 v}{\partial t^3} + a \delta_x^2 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right) + O(\delta_t^3 + \delta_x^3) \\
&= \frac{\partial v}{\partial t} + a \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\delta_t}{2} \left( a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a^3 \delta_t \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right) \\
&\quad + \frac{1}{6} \left( \delta_t^2 \left( -a^3 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right) + a \delta_x^2 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right) + O(\delta_t^2 + \delta_x^2) \\
&= \frac{\partial v}{\partial t} + a \frac{\partial v}{\partial x} + \underbrace{\frac{a^2 \delta_t}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{\text{antidiffusif} \rightarrow \text{drame}} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \left( a^3 \frac{\delta_t^2}{3} + a \frac{\delta_x^2}{6} \right) + O(\delta_t^2 + \delta_x^2)
\end{aligned}$$

Il convient maintenant de définir une notion de stabilité. Soit  $u(t_n, x) = u_j^n$  sur  $[x_j, x_{j+1}[$ . On a

$$\|u(t_n, x)\|_p = \sqrt[p]{\sum_j |u_j^n|^p \delta_x}$$

**Définition 5.2** On dit qu'un schéma est stable en norme  $L^p$  lorsque pour tout  $T > 0$ , il existe  $c_T$  tel que pour tout  $u_0(x) \in L^p$  et  $t_n \in [0, T]$ ,

$$\|u(t_n, x)\|_p \leq c_T \|u_0\|_p$$

Quand un schéma est stable en norme  $L^2$ , il est dit stable au sens de von Neumann.

*Remarque 5.1* On exploite dans cette définition la linéarité de l'équation à résoudre.

**Exemple 5.5 Le schéma upwind** On pose  $u(t_n, x) = u_j^n$  sur  $[x_j, x_{j+1}[$  et  $\hat{u}(t_n, \xi) = \int e^{-in\xi} u(t_n, x) dx$ .

$$\frac{u(t_{n+1}, x) - u(t_n, x)}{\delta_t} + a \frac{u(t_n, x) - u(t_n, x - \delta_x)}{\delta_x} = 0$$

On passe à la transformée de Fourier :

$$\frac{\hat{u}(t_{n+1}, \xi) - \hat{u}(t_n, \xi)}{\delta_t} + \frac{a}{\delta_x} (1 - e^{-i\xi\delta_x}) \hat{u}(t_n, \xi) = 0$$

CHAPITRE 5. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE  
TRANSPORT

---

Donc

$$\widehat{u}(t_{n+1}, \xi) = \widehat{u}(t_n, \xi) \left( 1 - \frac{a\delta_t}{\delta_x} (1 - e^{i\xi\delta_x}) \right)$$

**THÉORÈME 5.1** VON NEUMANN *Un schéma numérique qui s'écrit après transformation de Fourier :*

$$\widehat{u}(t_{n+1}, \xi) = g(\xi\delta_x, \delta_x, \delta_t)\widehat{u}(t_n, \xi)$$

est stable en norme  $L^2$  ssi il existe  $K$  tel que pour tout  $\delta_x, \delta_t, \xi$

$$|g(\xi\delta_x, \delta_x, \delta_t)| \leq 1 + K\delta_t$$

*Démonstration.* On admet  $\Rightarrow$ . Montrons  $\Leftarrow$ . On a

$$|\widehat{u}(t_n, \xi)| \leq |g|^n |\widehat{u}(0, \xi)| \leq (1 + K\delta_t)^{\frac{T}{\delta_t}} |\widehat{u}(0, \xi)| \leq e^{KT} |\widehat{u}(0, \xi)|$$

On passe à la norme et comme  $u \mapsto \widehat{u}$  est une isométrie, on obtient

$$\|u(t_n, x)\|_2 \leq e^{KT} \|u(0, x)\|_2 \quad \blacksquare$$

*Remarque 5.2* Pour l'exemple précédent,  $g = 1 - \lambda(1 - e^{-i\theta})$  avec  $\lambda = \frac{a\delta_t}{\delta_x}$  et  $\theta = \xi\delta_x$ .

Donc  $g = 1 - \lambda + \lambda \cos \theta - i\lambda \sin \theta$  et

$$\begin{aligned} |g|^2 &= (1 - \lambda)^2 + \lambda^2 + 2\lambda(1 - \lambda) \cos \theta \\ &= 1 - 2\lambda(1 - \lambda)(1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

Si  $\lambda \leq 1$ ,  $|g|^2 \leq 1$ . Sinon, si on fait  $\delta_x \rightarrow 0$  et  $\delta_t \rightarrow 0$  avec  $\lambda$  fixé  $> 1$ , on a  $\sup |g|^2 > 1$  donc on DOIT avoir  $\lambda \leq 1$ .

Donc le schéma upwind est stable au sens de Von Neumann ssi  $\frac{\delta_x}{\delta_t} \geq a$ . (condition de Courant-Friedrichs-Lévy).

**Définition 5.3** Posons  $\lambda = a\frac{\delta_t}{\delta_x}$ . On dit que le schéma est conditionnellement stable au sens de von Neuman, sous la condition CFL lorsque

$$\forall T, \exists K_T, \lambda, \forall n, n\delta_t \leq T, \forall \lambda \leq \lambda_0, \|u^n(t, x)\|_2 \leq K_T \|u^0\|_2$$

**THÉORÈME 5.2** *On a conditionnelle stabilité ssi*

$$\exists C, \forall \lambda \leq \lambda_0, |g(Q, \delta_x, \delta_t)| \leq 1 + C\delta_t$$

*Remarque 5.3* Le schéma upwind est stable conditionnellement à  $\lambda \leq 1$ .



---

**THÉORÈME 5.3** Soit un schéma  $u_j^{n+1} = u_j^n + \delta_t \phi((u_k^n), \delta_x, \delta_t)$ .

On suppose le schéma consistant (ie d'ordre  $\geq 1$  en temps et en espace).

La stabilité  $L^2$  du schéma est une CNS de convergence du schéma pour la norme  $L^2$ .

Ici, on dit que le schéma converge pour la norme  $L^2$  lorsque

$$\forall T > 0, \lim_{\delta_t, \delta_x \rightarrow 0} \sup_{n\delta_t \leq T} \|v(t^n, x) - u(t^n, x)\|_2 = 0$$

*Démonstration.* On montre que stable + consistant  $\Rightarrow$  convergent. (Réciproque admise)

On part de la consistance

$$u(t^{n+1}, x_j) = u(t^n, x_j) + \delta_t \phi((u(t^n, x_k))_k, \delta_x, \delta_t)_j^n + \delta_t \varepsilon_j^n$$

avec  $\varepsilon_j^n = O(\delta_t + \delta_x)$ . Comme  $\varepsilon_j^n$  provient d'un DL, on a l'uniformité suivante :

$$\forall T, \exists C_T, \forall n, n\delta_t \leq T \Rightarrow \forall j, |\varepsilon_j^n| \leq C_T(\delta_x + \delta_t)$$

Par ailleurs,  $u_j^{n+1} = u_j^n + \delta_t \phi((u_k^n), \delta_x, \delta_t)$ .

En faisant la différence, et en utilisant la linéarité de  $\partial_t u + a\partial_x u = 0$  donc celle de  $\phi$ . On récupère quitte à poser

$$e_j^{n+1} = e_j^n + \delta_t \phi((e_k^n), \delta_x, \delta_t) - \delta_t \varepsilon_j^n$$

Soit  $S$  l'opérateur linéaire

$$(v_j^n)_j \mapsto (v_j^{n+1})_j = (v_j^n + \delta_t \phi((v_k^n), \delta_x, \delta_t))_j$$

L'hypothèse de stabilité dit : en posant

$$v^n(x) = v_j^n \text{ sur } [x_j, x_{j+1}[$$

on a  $\|v^n(x)\|_2 \leq c_T \|v^0\|_2$  pour tout  $n$  tel que  $n\delta_t \leq T$ . L'égalité précédente assure alors

$$(e_j^{n+1})_j = S((e_j^n)_j) + \delta_t (\varepsilon_j^n)_j$$

De plus, pour tout  $j$ ,  $e_j^0 = 0$ . Intéressons-nous au terme général  $S^{n-k}(\varepsilon_j^{k-1})_j$ .

Posons

$$\varepsilon^{k-1}(x) = \varepsilon_j^{k-1} \text{ sur } [x_j, x_{j+1}[$$

$$\eta^{n,k}(x) = (S^{n-k}(\varepsilon_j^{k-1}))_j \text{ sur } [x_j, x_{j+1}[$$

L'hypothèse de stabilité affirme  $\|\eta^{n,k}(x)\|_2 \leq c_T \|\varepsilon^{k-1}(x)\|_2$  pour  $n\delta_t \leq T$  et  $0 \leq k \leq n$ . Par consistance,

$$\|\varepsilon^{k-1}(x)\|_2 = \sqrt{\sum_j \delta_x |\varepsilon_j^{k-1}|^2}$$

et on a non seulement

$$\exists c_T, \forall k \delta_t \leq T, \forall j, |\varepsilon_j^{k-1}| \leq c_T(\delta_x + \delta_t)$$

mais aussi, pourvu qu'on suppose dans la définition d'ordre du schéma que  $u$  est suffisamment régulière (genre  $C_c^\infty$ ), l'estimation

$$\exists c_T, \forall k \delta_t \leq T, \forall j, |\varepsilon_j^{k-1}| \leq c_T(\delta_x + \delta_t) \alpha_j^{k-1}$$

avec  $\sqrt{\sum_j |\alpha_j^{k-1}|^2 \delta_x} \leq c_T$ . On a donc

$$\forall k, (k-1)\delta_t \leq T, \|\varepsilon^{k-1}(x)\|_2 \leq c_T(\delta_t + \delta_x) \sqrt{\sum_j |\alpha_j^{k-1}| \delta_x}$$

Avec  $v$  telle que  $v(t_n, x) = u_j^n$  sur  $[x_j, x_{j+1}[$ , on a

$$\begin{aligned} & \|v(t^n, x) - u(t^n, x)\|_2 \\ & \leq \sqrt{\sum_j |u_j^n - u(t_n, x_j)|^2 \delta_x} + \sqrt{\sum_j \int_{x_j}^{x_{j+1}} |u(t_n, x_j) - u(t_n, x)|^2 dx} \\ & \leq \sqrt{\sum_j |e_j^n|^2 \delta_x} + c_T \delta_x \leq \sum_{k=0}^{n-1} c_T \delta_t (\delta_x + \delta_t) + c_T \\ & \leq c_T(n\delta_t)(\delta_t + \delta_x) + c_T \delta_x \leq c_t(\delta_t + \delta_x) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

*Remarque 5.4* On dit qu'un schéma pour une EDO est d'ordre  $p$  quand  $\sup_{n\delta_t \leq T} |y(t^n) - y^n| = O(\delta_t^p)$  pour  $y$  solution suffisamment régulière ( $C^\infty$ ) de  $y' = f(t, y)$ . Pratiquement, pour vérifier qu'un schéma est d'ordre  $p$ , on calcule une fois pour toute une solution dite de référence avec  $\delta_t$  très petit et on identifie cette solution avec  $y(t^n)$ . Puis on trace pour différentes valeurs de  $\delta_t$  la fonction  $\log(|y(t^n) - y^n|)$  en fonction de  $\log(\delta_t)$ . On obtient une droite de pente  $p$ .

Si  $y$  (la vraie solution) n'est pas  $C^\infty$  mais seulement  $C^k$  avec  $k \ll p$ , souvent on obtient une droite de pente  $k \leq p$ .

## 5.1 Parenthèse culturelle

Pour approximer  $\int_0^1 f(t) dt$ , on connaît la méthode des rectangles à gauche (ordre 1), du point milieu (ordre 2) et celle des points de Gauss (ordre  $2n+1$  qui est optimal) :

$$\int_0^h f = h \sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i, h)$$

## 5.1. PARENTHÈSE CULTURELLE

---

avec  $x_i$  et  $\omega_i$  bien choisis.

**THÉORÈME 5.4** *Si la méthode élémentaire est d'ordre  $p$  alors la méthode ci-dessus fournit une approximation d'ordre  $O(h^p)$  de  $\int_0^1 f(t) dt$ .*

CHAPITRE 5. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE  
TRANSPORT

---

# Chapitre 6

## Petit florilège

- Si  $\xi > 0$ , on est les rois du pétrole
- Ça commence à chier dans la colle
- Il me sort plus au sens de moins
- Bon, on va quand même pas déconner
- Après passage à la moulinette de Fourier
- On voit quelque chose qui est la tarte à la crème de l'analyse
- J'y vais un peu comme un goret
- Là, je suis en train de faire une estimation pour homme, on fait pas dans la dentelle
- Ça, ça me rappelle à mort l'estimation d'hier
- C'est moral qu'elle soit vachement plus pire
- Là c'est plus des maths que je fais, c'est un métadiscours
- Je crache par terre et je recommence
- C'est presque de la coquetterie
- Ça se différentie comme chez Mémé
- En l'occurrence, back to business
- Il faut violer l'inégalité
- Le bonhomme devant le gradient c'est un mec qui va jouer un rôle
- Je dérive comme j'ai appris à dériver quand j'étais petit
- So what ?
- C'est le seul calcul viril qu'on a fait, là c'est pour les fillettes
- Et là, j'ai besoin de mon avocat
- Le  $dt$  accroche le regard, il nous dit intègre moi par parties
- Cette fonction est développable en série entière, c'est juste écrit sur sa gueule
- Dieu à dit : tu ne dériveras pas les inégalités !