Topologie algébrique

Pierron Théo

ENS Ker Lann

Table des matières

Chapitre 1

Groupe de Poincaré

1.1 Rappels de topologie

<u>Définition 1.1</u> Soit X un espace topologique. Un chemin dans X est une application continue de $\gamma : [a, b] \to X$ avec usuellement $a = 0$ et $b = 1$. On dit que $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ sont les extrémités du chemin : l'origine et l'arrivée.

<u>Définition 1.2</u> X est connexe par arcs ssi pour tout $(x, y) \in X^2$, il existe un chemin de x à y dans X.

<u>Définition 1.3</u> On appelle espace projectif le quotient de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ par la relation de colinéarité. On le note $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$. On peut le munir de la topologie quotient. C'est aussi le quotient de $\mathbb{S}^n$ par la relation $x \sim y \quad \text{ssi} \quad x = \pm y$.

Proposition 1.1
- Toute partie convexe est connexe par arcs.
- Les sphères sont connexes par arcs.
- Les espaces projectifs sont connexes par arcs.
- L'adhérence d'un connexe est connexe.
- Si X est connexe par arcs alors il est connexe.
- Si $(A_j)_j$ sont connexes par arcs et s'ils ont un point commun, alors leur union reste connexe par arcs.

<u>Définition 1.4</u> La relation $x \sim y$ ssi il existe un chemin de x à y est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalences sont appelées composantes connexes.

Proposition 1.2 Si $f : X \to Y$ est continue et X connexe par arcs, alors $f(X)$ le reste. En particulier, si f est surjective, Y est connexe par arcs.

<u>Définition 1.5</u> Une variété topologique de dimension n est un espace topologique V tel que tout point $v \in V$ possède un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 1.1 Tout point $v \in V$ possède un voisinage homéomorphe à une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 1.1

- Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ continue. Dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, on regarde le graphe de f : $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}^p\}$.
  On pose $\varphi^- : (x, y) \mapsto (x, y - f(x))$ et $\varphi^+ : (x, y) \mapsto (x, y + f(x))$.
  Γ_f est une variété topologique.
- Le ruban de Möbius est une variété topologique.

Remarque 1.2 Les variétés topologiques connexes de dimension 1 *sont homéomorphes soit à un cercle, soit à une droite.*

Les variétés topologiques connexes compactes orientables sont :

- *La sphère*
- *Le tore*
- *Le tore à 2 trous*
- *Les bretzels à n trous.*

Proposition 1.3 Les variétés topologiques sont localement connexes par arcs.

Proposition 1.4 Si X est localement connexe par arcs, les composantes connexes par arcs de X sont ouvertes et fermés dans X.

Proposition 1.5 Un connexe est localement connexe par arcs.

1.2 Homotopie

Définition 1.6 Soit X un espace topologique, γ_0 et γ_1 deux chemins de X ayant les mêmes extrémités. On dit que γ_0 et γ_1 sont homotopes ssi il existe une application continue $\delta : [0,1]^2 \to X$ telle que $\delta(t,0) = \gamma_0(t)$, $\delta(t,1) = \gamma_1(t)$, $\delta(0,s) = \gamma_0(0)$ et $\delta(1,s) = \gamma_0(1)$.

δ s'appelle homotopie à extrêmités fixes entre γ_0 et γ_1.

Exemple 1.2

$$\gamma_n : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{U} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{2i\pi nt} \end{cases}$$

Nous verrons que si γ_n et $\gamma_{n'}$ sont homotopes à extrémité fixe alors $n = n'$.

Remarque 1.3 Si $\gamma : [0,1] \to X$ est un chemin, on se donne $\sigma : [0,1] \to [0,1]$ continue, telle que $\sigma(0) = 0$ et $\sigma(1) = 1$, alors $\gamma' = \gamma\sigma$ et γ sont homotopes à extrémités fixes par :

$$\delta : \begin{cases} [0,1]^2 & \to & X \\ (t,s) & \mapsto & \gamma(s\sigma(t) + (1-s)t) \end{cases}$$

Définition 1.7 On dit que deux chemins γ' et γ'' dans X sont composables ssi l'arrivée de γ' est l'origine de γ''.

On construit γ (mise bout à bout de γ' et γ'') qui part de $\gamma'(0)$ pour aller à $\gamma''(1)$ par :

$$\gamma : \begin{cases} [0,1] & \rightarrow & X \\ t & \mapsto & \gamma'(2t) \quad \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ t & \mapsto & \gamma''(2t-1) \quad \text{sinon} \end{cases}$$

Le chemin obtenu se note $\gamma' \circ \gamma''$. La continuité est immédiate et on peut l'obtenir de la proposition qui suit.

Proposition 1.6 On considère $\varphi : X = A \cup B \rightarrow Y$ espace topologique avec A et B fermés.

Si $f|_A : A \rightarrow Y$ et $f|_B : B \rightarrow Y$ sont continues pour la topologie induite sur A et B, alors f est continue.

Démonstration. Si $F \subset Y$ est un fermé, $f^{-1}(F) = f^{-1}|_A(F) \cup f^{-1}|_B(F)$ qui est fermé. ■

Définition 1.8 Soit $\gamma : [0,1] \rightarrow X$.

Le chemin inverse de γ, noté γ^{-1}, est $t \mapsto \gamma(1-t)$.

Définition 1.9 Le chemin constant $\mathcal{E}_x$, est le chemin $t \mapsto x$.

Proposition 1.7 Soit $\gamma : [0,1] \rightarrow X$.

$\gamma\gamma^{-1}$ est homotope au chemin constant $\mathcal{E}_{\gamma(0)}$.

Démonstration. L'idée de l'homotopie c'est que l'on va de moins en moins loin : $\delta = (t,s) \mapsto \gamma(st)\gamma^{-1}(st)$. ■

Proposition 1.8 Si γ_0 et γ_1 sont homotopes à extrémités fixes, alors γ_0^{-1} et γ_1^{-1} sont homotopes à extrémités fixes.

Démonstration. Si $\delta(t,s)$ est une homotopie entre γ_0 et γ_1, $\varphi(1-t,s)$ est une homologie entre γ_0^{-1} et γ_1^{-1}. ■

Proposition 1.9 (Homotopie et mise bout à bout) Soient γ_0' et γ_0'' composables, γ_1' et γ_1'' composables, avec $\gamma_0'(0) = \gamma_1'(0)$, $\gamma_0'(1) = \gamma_1'(1) = \gamma_0''(0) = \gamma_1''(0)$ et $\gamma_0''(1) = \gamma_1''(1)$.

Si γ_0' et γ_1' sont homotopes à extrémités fixes, et si γ_0'' et γ_1'' aussi, alors $\gamma_0'\gamma_0''$ et $\gamma_1'\gamma_1''$ sont homotopes.

Démonstration. Soient $f'(t,s)$ une homologie entre γ_0' et γ_1', $f''(t,s)$ une homologie entre γ_0'' et γ_1''.

$$\delta : \begin{cases} [0,1]^2 & \to & X \\ (t,s) & \mapsto & f'(t,s) \quad \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ (t,s) & \mapsto & f''(2t-1,s) \quad \text{sinon} \end{cases}$$

convient. ∎

Proposition 1.10 (Associativité) On se donne 3 chemins composables, $\gamma, \gamma', \gamma''$.

$\gamma(\gamma'\gamma'')$ est homotope à extrémités fixes à $(\gamma\gamma')\gamma''$, mais ces chemins ne sont pas égaux en général.

1.3 Lacets et groupe fondamental (ou groupe de Poincaré ou premier groupe d'homologie)

Définition 1.10 $\gamma : [0,1] \to X$ est un lacet en x ou de base x ssi $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. On note $\mathcal{L}(X,x)$ l'ensemble des lacets basés en x.

Exemple 1.3 $t \in [0,1] \mapsto e^{2in\pi t}, n \in \mathbb{Z}$, est un lacet pour chaque n, de point de base $x = 1$.

Remarque 1.4 *Si γ et γ' sont deux éléments de $\mathcal{L}(X,x)$, alors $\gamma, \gamma' \in \mathcal{L}(X,x)$.*

Deux lacets sont homotopes ssi il existe une homotopie à extrémités fixes les reliant.

Définition 1.11 On note $\Pi_1(X,x)$ le quotient de $\mathcal{L}(X,x)$ par la relation d'homotopie (à extrémités fixes). On le munit de la loi de groupe $\circ$.

L'inverse de la classe de γ est la classe de γ^{-1}, et l'élément neutre est la classe de $\mathcal{E}_x$.

Remarque 1.5 *Le 1 de Π_1 vient du fait qu'on regarde les « morphismes » de $\mathbb{S}^1$.*

Théorème 1.1 *On suppose que X est connexe par arcs.*

Pour tout $x, y \in X$, $\Pi_1(X,x)$ et $\Pi_1(X,y)$ sont isomorphes. En général, l'isomorphisme n'est pas canonique.

Démonstration. Il existe γ joignant x à y. Soit l un lacet basé en y.

$\gamma l \gamma^{-1}$ est un lacet en x. ∎

Proposition 1.11 L'application :

$$\Gamma_\gamma : \begin{cases} \Pi_1(X,y) & \to & \Pi_1(X,x) \\ l & \mapsto & \gamma l \gamma^{-1} \end{cases}$$

est un isomorphisme de groupes d'inverse $\Gamma_{\gamma^{-1}}$.

Démonstration. Soient $l_1, l_2 \in \Pi_1(X,y)$.

$$\begin{aligned} \Gamma_\gamma(l_1 l_2) &= \gamma(l_1 l_2)\gamma^{-1} \\ &\text{homotope à } (\gamma l_1 \gamma^{-1})(\gamma l_2 \gamma^{-1}) \\ &= \Gamma_\gamma(l_1)\Gamma_\gamma(l_2) \end{aligned}$$

Proposition 1.12 Soit $f : X \to Y$, un morphisme d'espaces topologiques et $\gamma \in \mathcal{L}(X,x)$.

On a :

- $f\gamma \in \mathcal{L}(Y,y)$
- Si $\gamma, \gamma' \in \mathcal{L}(X,x)$ sont homotopes, alors $f\gamma$ et $f\gamma'$ sont aussi homotopes. En effet, si $\delta(t,s)$ est une homotopie entre γ et γ'_1, alors $f\delta$ est une homotopie entre $f\gamma$ et $f\gamma'$.

On a donc une application notée $\pi_x(f) : \Pi_1(X,x) \to \Pi_1(Y,f(x))$ qui, à chaque classe d'homotopie du lacet γ, associe la classe d'homotopie du lacet $f\gamma$.

Cette application est un morphisme de Lagrange.

Proposition 1.13 Soient $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ et $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0)$, $z_0 = g(y_0)$, morphismes d'espaces topologiques.

On a $\pi(g \circ f) = \pi(g) \circ \pi(f)$.

Dans le cas $X = Y$ et $f = \mathrm{Id}$, $\pi(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{\Pi_1(X,x)}$.

Démonstration. On considère $h : X \to Y$ et $h^{-1} : Y \to X$.

On a $\mathrm{Id} = \pi(\mathrm{Id}) = \pi(h \circ h^{-1}) = \pi(h) \circ \pi(h^{-1})$. ■

Corollaire 1.1 *Si $h : X \to Y$ est un homéomorphisme alors $\pi(h)$ est un isomorphisme entre $\Pi_1(X,x_0)$ et $\Pi_1(Y,h(x_0))$.*

Exemple 1.4 Nous verrons que $\Pi(\mathbb{S}^2,x)$ est $\{1\}$ et que $\Pi_1(X \times Y,(x_0,y_0)) \simeq \Pi_1(X,x_0) \times \Pi_1(Y,y_0)$ et que $\Pi_1(\mathbb{S}^1,x) \simeq \mathbb{Z}$.

$\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ (tore) a pour Π_1 l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ donc $\mathbb{T}^2 \not\simeq \mathbb{S}^2$.

Définition 1.12 Un espace connexe par arcs X est dit simplement connexe ssi son groupe fondamental est trivial.

Exemple 1.5 $\mathbb{R}^n$ est simplement connexe. En effet, si $t \mapsto \gamma(t)$ est un lacet basé en 0, $\delta(t,s) = s\gamma(t)$ est une homologie entre γ et le lacet constant.

Définition 1.13 (Localisation) Un espace X est localement connexe si tout point x a une base de voisinage simplement connexe.

Exemple 1.6 Toutes les variétés topologiques sont localement simplement connexes.

L'union des cercles de rayon $\frac{1}{n}$ tangents à la droite horizontale passant par x n'est pas simplement connexe.

Proposition 1.14 Soient X et Y deux espaces topologiques. On a :

$$\Pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \Pi_1(X, x_0) \times \Pi_1(Y, y_0)$$

1.4 Applications homotopes, espaces homéotopes

Définition 1.14 Soient $f_0, f_1 : X \to Y$ continues.

On suppose que $f(x_0) = f_1(x_0) = y_0$. On dit que f_0 et f_1 sont homotopes à extrémités fixes (ou basiquement homotopes) ssi il existe $F : X \times [0,1] \to Y$ continue telle que $F(x_0, s) = y_0$, $F(x, 0) = f_0(x)$ et $F(x, 1) = f_1(x)$.

Il s'agit d'une généralisation d'homotopie des chemins.

Exemple 1.7

- Soient $f_0, f_1 : X \to \mathbb{R}^n$, tel que $f_0(x_0) = f_1(x_0)$. f_0 et f_1 sont homotopes via :
$$(F(x,s) = (1-s)f_0(x) + sf_1(x)$$
- Soit :
$$f_n : \begin{cases} \mathbb{S}^1 & \to & \mathbb{S}^1 \\ x & \mapsto & x^n \end{cases}$$
f_n et f_p ne sont pas homotopes ssi $p \neq n$.

Proposition 1.15 Soit f_0, $f_1 : X \to Y$ avec $y_0 = f_0(x_0) = f_1(x_0)$.

Si f_0 et f_1 sont homotopes à extrémités fixes, alors $\pi(f_0)$ et $\pi(f_1)$: $\Pi(X, x_0) \to \Pi(Y, y_0)$ sont égales.

Démonstration. Soit γ un lacet de X. $f_0 \circ \gamma$ et $f_1 \circ \gamma$ sont des lacets de Y.

Si F est une homotopie entre f_0 et f_1, $F(\gamma(t), s)$ est une homotopie entre $f_0 \circ \gamma$ et $f_1 \circ \gamma$.

On a donc $\overline{f_0 \circ \gamma} = \overline{f_1 \circ \gamma}$ donc $\pi(f_0) = \pi(f_1)$. ∎

Définition 1.15 On appelle équivalence d'homotopie entre X et Y (avec points de base x_0, y_0) une application $f : X \to Y$ telle que $f(x_0) = y_0$ et f soit inversible à homotopie près ie il existe $g : Y \to X$ telle que $g \circ f$ (resp. $f \circ g$) soit homotope à Id_X (resp. Id_Y).

S'il existe une équivalence d'homotopie entre X et Y, on dit que X et Y sont homéotopes.

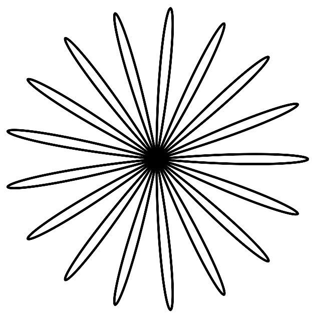
Exemple 1.8 $\mathbb{R}^n$ et $\{0\}$ sont homéotopes ($f = 0$, $g = 0$: $f \circ g = \mathrm{Id}_{\{0\}}$ et $g \circ f = 0$ qui est homotope à $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$).

Proposition 1.16 Homéomorphe implique homéotope mais la réciproque est fausse.

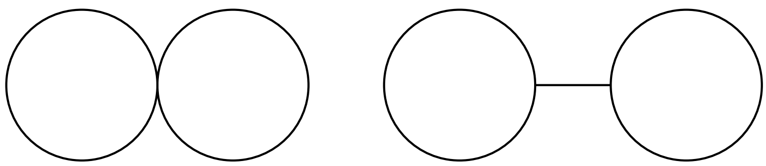
<u>Définition 1.16</u> Un espace topologique connexe est dit contractile ssi il est homéotope à un point.

Proposition 1.17 Les sphères $\mathbb{S}^n$ ne sont pas contractiles.

Exemple 1.9
- $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est homéotope à $\mathbb{S}^1$.
- $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 1\}$ est homéotope à un huit.
- $\mathbb{R}^2$ privé de n points est homéotope à une pâquerette à n pétales.



On en déduit l'homéotopie entre les figures :



En faisant tourner par rapport à un axe vertical, on conserve une homotopie.

Proposition 1.18 $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{S}^n$ sont homéotopes.

<u>Théorème 1.2</u> *Deux espaces X et Y topologiques connexes par arcs et homéotopes on des groupes fondamentaux isomorphes.*

Démonstration. Si $f : X \to Y$ $(f(x_0) = y_0)$ est continue, alors on a un morphisme de $\Pi_1(X, x_0) \to \Pi_1(Y, y_0)$.

On sait aussi que si $f' : X \to Y$ était homotope à f, alors $\pi(f) = \pi(f')$.

Comme X et Y sont homéotopes, il existe f et g tel que $f \circ g$ homotope à Id_Y et $g \circ f$ homotope à Id_X.

On a $\pi(g) \circ \pi(f) = \mathrm{Id}_{\Pi_1(X,x_0)}$ et idem dans l'autre sens, donc $\Pi(f)$ est un isomorphisme de groupe. ∎

Proposition 1.19 1,2,3,5,7 sont homéotopes. 6 et 9 aussi.

1.5 Calcul de $\Pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$

On va associer à tout lacet de $\mathbb{S}^1$ un nombre qui est le nombre de tours.

Lemme 1.2.1
Soient f_0 et $f_1 : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ continues telles que $f_i(0) = f_i(1) = 1$. On suppose qu'il existe k tel que $\sup |f_0(t) - f_1(t)| \leqslant k < 2$.

Alors f_0 et f_1 sont homotopes.

Démonstration. Considérer

$$(t, s) \mapsto \frac{(1-s)f_0(t) + sf_1(t)}{|(1-s)f_0(t) + sf_1(t)|}$$

qui est bien définie par la condition $k < 2$. ∎

<u>Définition 1.17</u> On dit qu'un lacet γ est différentiable ssi il est différentiable en tant qu'application de $[0,1] \to \mathbb{R}^2$.

Lemme 1.2.2
Tout lacet est homotope à un lacet différentiable.

Démonstration. Par Stone-Weierstrass, si $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ différentiable telle que $\sup |\varphi(t) - \psi(t)| < \varepsilon$.

Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ différentiable suffisament proche de γ (appliquer Stone-Weierstrass aux composantes de γ).

Comme φ est suffisament proche, alors φ ne s'annule pas et $\frac{\varphi}{|\varphi|}$ est différentiable.

Comme φ est proche de γ, $|\varphi|$ est proche de 1 donc $\frac{\varphi}{|\varphi|}$ c'est à peu près φ ie γ. ∎

Proposition 1.20 Les sphères $\mathbb{S}^2$ pour $n \geqslant 2$ sont simplement connexes.

Démonstration. Si γ_0 est un lacet sur $\mathbb{S}^2$, on peut approcher γ_0 par $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ dont l'image est une ligne polygonale.

On projette depuis le centre de la sphère. On obtient un lacet γ_1 sur $\mathbb{S}^2$ qui est proche de γ_0 dont l'image est une union finie d'arcs de cercles.

γ_1 évite au moins un point de la sphère. En projetant stéréographiquement, on a un isomorphisme avec $\mathbb{R}^2$. γ_1 est donc homotope à un point.

Donc γ_0 est homotope à un point de $\mathbb{S}^2$.

Donc $\mathbb{S}^2$ est simplement connexe. La même preuve s'applique aux autres $\mathbb{S}^n$ avec $n \geqslant 2$. ∎

Définition 1.18 Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ différentiable. On appelle degré de φ la quantité :

$$\deg(\varphi) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{D\varphi}{\varphi} = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\mathbb{R}e(\varphi)'(t) + i\Im(\varphi)'(t)}{\varphi(t)}\, \mathrm{d}t$$

On appelle argument de φ la quantité :

$$\arg(\varphi)(t) = -i \int_0^1 \frac{D\varphi}{\varphi}$$

Proposition 1.21 Soit $\psi : t \mapsto \mathrm{e}^{i \arg(\varphi(t))}$. On a $\varphi = \psi$.

Démonstration. On vérifie que $\frac{\psi'}{\psi} = \frac{\varphi'}{\varphi}$. Par unicité dans Cauchy-Lipschitz, on a $\varphi = \psi$ (puisque $\psi(0) = 1 = \varphi(0)$). ∎

Remarque 1.6 En utilisant la proposition, comme $\frac{\arg(\varphi)(1)}{2\pi} = \deg(\varphi)$*, comme* $\varphi(1) = 1$*, on a* $\deg(\varphi) \in \mathbb{Z}$.

À tout lacet différentiable, on peut donc associer un degré entier.

Si φ_s *est une famille de lacets continue alors* $s \mapsto \deg(\varphi_s)$ *est continue donc constante (puisqu'à valeurs dans* $\mathbb{Z}$*). En particulier, deux lacets différentiables voisins ont même degré, de même que deux lacets homotopes.*

Définition 1.19 Soit $\varphi_0 : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ un lacet continu et φ_1, φ_2 deux lacets proches de φ_0. φ_1 et φ_2 sont proches donc ont même degré. On définit donc le degré de φ comme le degré de ses voisin différentiables, ce qui est bien défini.

Proposition 1.22 Finalement, l'application degré passe au quotient et définit une application : $\Pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \to \mathbb{Z}$.

C'est un isomorphisme.

Démonstration. C'est un morphisme : si $\varphi = \varphi_1\varphi_2$, $\deg(\varphi) = \deg(\varphi_1) + \deg(\varphi_2)$ (il suffit d'écrire les intégrales et supooser φ_1 et φ_2 différentiables, ce qui est licite par ce qu'on a vu précédemment)

De plus $\deg(\varphi^{-1}) = -\deg(\varphi)$.
C'est clairement surjectif. Il faut maintenant montrer l'injectivité.
Soit φ de degré nul.
Posons $\varphi_s(t) = \mathrm{e}^{is\arg(\varphi(t))}$.
On a clairement $\varphi_s(0) = 1$, $\varphi_0 = 1$ et $\varphi_1 = \varphi$.
On doit vérifier $\varphi_s(1) = 1$. On a $\varphi_s(1) = \mathrm{e}^{is\arg(\varphi)(1)}$.
Or $\arg(\varphi)(1) = 1$ car $\deg(\varphi) = 1$. ■

<u>THÉORÈME 1.3</u> $\Pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ *est isomorphe à* $\mathbb{Z}$ *et* $\Pi_1(\mathbb{S}^n, *) = \{1\}$ *pour* $n \geqslant 2$.

1.6 Application de Brouwer

<u>THÉORÈME 1.4</u> *Toute application continue de* $\overline{D}(0,1)$ *possède un point fixe.*

Remarque 1.7 C'est faux sur le disque ouvert.

1.6.1 Concept de rétraction

<u>Définition 1.20</u> Soient $A \subset X$ deux espaces topologiques connexes par arcs, $r : X \to A$ continue est une rétractation ssi $r|_A = \mathrm{Id}$.

On dit alors que X se rétracte sur A.

<u>THÉORÈME 1.5</u> *Soit* $A \subset X$ *avec* X *qui se rétracte sur* A *via* r. *Soit* $x_0 \in A$.
$\pi(\subset) : \Pi(A, x_0) \to \Pi(X, x_0)$ *est injective.*

Démonstration. $r \circ \subset = \mathrm{Id}_A$ donc $\pi(r) \circ \pi(\subset) = \pi(\mathrm{Id}_A)$. Donc $\pi(\subset)$ est injective. ■

COROLLAIRE 1.2 *Il n'y a pas d'application continue de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{S}^1$ *qui est l'identité sur* $\mathbb{S}^1$.

Démonstration. (Théorème de Brouwer)
Supposons qu'il existe f qui marche.
On pose $\varphi(x)$ le point d'intersection de la demi droite $[f(x), x)$ avec $\mathbb{S}^1$.
φ est continue et si $x \in \mathbb{S}^1$ est au bord, $\varphi(x) = x$.
φ est donc une rétractation du disque unité fermé sur $\mathbb{S}^1$, ce qui contredit le théorème (puisqu'on crée un morphisme injectif de $\mathbb{Z} \to \{1\}$). ■

Remarque 1.8
- *C'est vrai en toute dimension.*
- *En dimension 1, on peut utiliser le TVI.*

Chapitre 2

Le théorème de Van-Kampen

2.1 Groupe libre

Définition 2.1 Un mot est une suite de lettres. Comme il peut exister des règles de simplification, on peut simplifier. Pour ce faire, on quotiente l'alphabet par les règles de simplification.

On obtient le groupe libre. On le note $L(A)$ avec A l'alphabet.

Proposition 2.1 Soit G un groupe avec des morphismes φ et $\psi : \mathbb{Z} \to G$.

Il existe un unique morphisme $\theta : L(a,b) \to G$ avec $\theta \circ (\underbrace{a \mapsto a^n}_{\widetilde{a}}) = \varphi$ et $\theta \circ \widetilde{b} = \psi$.

Démonstration. On prend $\theta(a^n) = \varphi(n)$ et $\theta(b^n) = \psi(n)$.

Et on définit $\theta(a^{m_1}b^{n_1} \cdots a^{m_k}b^{n_k}) = \varphi(m_1)\psi(n_1) \cdots \varphi(m_k)\psi(n_k)$. ∎

Soit G un groupe engendré par deux éléments α et β. On construit un morphisme $\varphi : L(a,b) \to G$ en décidant que $\varphi(a) = \alpha$ et $\varphi(b) = \beta$.

Si $a^{m_1}b^{n_1} \cdots a^{m_p}b^{m_p}$ est un mot réduit dans $L(a,b)$, son image par φ sera $\alpha^{m_1}\beta^{n_1} \cdots \alpha^{m_p}\beta^{n_p}$. φ est surjectif mais pas injectif en général.

Théorème 2.1 *Tout groupe G à deux générateurs est isomorphe à un quotient de $L(a,b)$.*

Les éléments de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ *s'appellent des relations du groupe G.*

Définition 2.2 Si S est un ensemble on construit le groupe libre $L(S)$ constitué du mot vide et des concaténations finies d'éléments de S.

Théorème 2.2 *Si G est engendré par un nombre fini de générateurs alors G est isomorphe à un quotient du groupe libre à p générateurs.*

Tout groupe est isomorphe à un quotient d'un $L(S)$.

Définition 2.3 On appelle groupe libre tout groupe isomorphe à un $L(S)$.

<u>Théorème 2.3</u> *Tout sous-groupe d'un groupe libre est libre.*

2.2 Produit libre de groupes

<u>Définition 2.4</u> Le produit libre de deux groupes G_1 et G_2 est constitué du mot vide et des juxtapositions de lettres de G_1 et G_2.

On munit de la règle de simplification : on remplace la concaténation de deux éléments de G_1 par leur produit (idem pour G_2).

<u>Théorème 2.4</u> *Soient φ_1 et φ_2 des morphismes $G_1 \to G$ et $G_2 \to G$.*

Il existe un unique morphisme $\varphi : G_1 * G_2 \to G$ qui étent φ_1 et φ_2.

Proposition 2.2 Les groupes libres de rang fini ont isomorphes à $\mathbb{Z}*\cdots*\mathbb{Z}$.

<u>Théorème 2.5</u> du ping-pong *Soient Γ_1 et Γ_2 deux sous-groupes des bijections de $X \to X$. Soit $\Gamma = \langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle$.*

Les éléments de Γ sont des bijections. On suppose qu'il existe $X_1, X_2 \subset X$ avec $X_2 \not\subset X_1$ tel que pour tout $\gamma \in \Gamma_1 \setminus \{\mathrm{Id}\}$, $\gamma(X_2) \subset X_1$ et pour tout $\gamma \in \Gamma_2 \setminus \{\mathrm{Id}\}$, $\gamma(X_1) \subset X_2$.

Si $\mathrm{Card}(\Gamma_1) \geqslant 3$ et $\mathrm{Card}(\Gamma_2) \geqslant 2$, alors Γ est isomorphe à $\Gamma_1 * \Gamma_2$.

Démonstration. On a un morphisme $\psi : \Gamma_1 * \Gamma_2 \to \Gamma$ (qui remplace la concaténation par la composition).

ψ est surjectif. Il faut montrer l'injectivité.

Soit $\omega \in \Gamma_1 * \Gamma_2$ non vide.

- S'il s'écrit $\alpha_1\beta_1 \cdots \beta_k\alpha_{k+1}$, alors $\psi(\omega)(X_2) \subset X_1$ et si $x \in X_2 \setminus X_1$, $\psi(\omega)(x) \neq x$ donc $\psi(\omega) \neq \mathrm{Id}$.
- S'il s'écrit $\beta_1\alpha_1 \cdots \beta_k$ on conjugue par $\alpha \in \Gamma_1$ non trivial.
  $\alpha\omega\alpha^{-1}$ est du type précédent et comme ψ est un morphisme, $\mathrm{Id} \neq \psi(\alpha\omega\alpha^{-1}) = \psi(\alpha)\psi(\omega)\psi(\alpha^{-1})$.
  Donc $\psi(\omega) \neq \mathrm{Id}$.
- S'il s'écrit $\alpha_1\beta_1 \cdots \beta_k$, soit $\alpha \in \Gamma_1 \setminus \{\mathrm{Id}, \alpha_1\}$ par hypothèse.
  En conjugant par α, $\alpha^{-1}\omega\alpha = \underbrace{\alpha^{-1}\alpha_1}_{\neq\varepsilon}\beta_1 \cdots \beta_k\alpha$.
  Par un des cas précédents, on conclut.
- Le dernier cas $(\beta_1 \cdots \beta_k\alpha_{k+1})$ se fait en conjuguant par α_{k+1}. ∎

Exemple 2.1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On pose $\Gamma_1 = \langle A \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z} \right\}$ et $\Gamma_2 = \langle B \rangle$.

Soit $X_1 = \{(x,y), |x| > |y|\}$ et $X_2 = \{(x,y), |x| < |y|\}$. $\Gamma_1 \setminus \{\mathrm{Id}\}$ envoie X_2 dans X_1 et $\Gamma_2 \setminus \{\mathrm{Id}\}$ envoie X_1 dans X_2.

Par le ping-pong, $\Gamma = \langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle$ est isomorphe à $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

Proposition 2.3 Soit Γ un sous-groupe de $GL(\mathbb{C})$.

On a l'alternative :

- Γ contient un groupe libre isomorphe à $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.
- Il existe $\Gamma' \subset \Gamma$ d'indice fini qui est triangulable. On dit que Γ est virtuellement résoluble.

Proposition 2.4 Soit G un groupe. $G * \{1\}$ est isomorphe à G.

Exemple 2.2 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est isomorphe à $((ab)^* + (ba)^{ast})(a+b)$.

2.3 Produit amalgamé

Définition 2.5 On prend trois groupes G_0, G_1 et G_2 et deux morphismes $\varphi_1 : G_0 \to G_1$ et $\varphi_2 : G_0 \to G_2$.

On considère le produit libre $G_1 \times G_2$ et les morphismes d'inclusion naturels $\theta_1 : G_1 \to G_1 * G_2$ et $\theta_2 : G_2 \to G_1 * G_2$.

Soit N le plus petit sous-groupe distingué de $G_1 * G_2$ qui contient $(\theta_1 \circ \varphi_1(g_0))(\theta_2 \circ \varphi_2(g_0))^{-1}$ pour tout $g_0 \in G_0$.

Le groupe $G_1 * G_2/N$ s'appelle produit amalgamé de G_1 et G_2 sur G_0. Il se note $G_1 \underset{G_0}{*} G_2$.

Remarque 2.1 Si $G_0 = \{1\}$ le produit amalgamé est $G_1 * G_2$.

Proposition 2.5 On note π la surjection canonique de $G_1 * G_2 \to G_1 * G_2/N$.

$\underbrace{\pi \circ \theta_1}_{=\pi_1} \circ \varphi_1 = \underbrace{\pi \circ \theta_2}_{=\pi_2} \circ \varphi_2$

<u>THÉORÈME 2.6</u> *Soient $\psi_1 : G_1 \to H$ et $\psi_2 : G_2 \to H$ des morphismes de groupes tels que $\psi_1 \circ \varphi_1 = \psi_2 \circ \varphi_2$.*

Il existe un unique morphisme $\psi : G_1 \underset{G_0}{*} G_2 \to H$ qui étend ψ_1 et ψ_2 ie $\psi_1 = \psi \circ \pi_1$ et $\psi_2 = \psi \circ \pi_2$.

Démonstration. On utilise la propriété universelle du produit libre $G_1 * G_2$.

Il existe ψ' $G_1 * G_2 \to H$ tel que $\psi_1 = \psi \circ \theta_1$ et $\psi_2 = \psi \circ \theta_2$.

L'hypothèse $\psi_1 \circ \varphi_1 = \psi_2 \circ \varphi_2$ montre que $\psi' \circ \theta_1 \circ \varphi_1 = \psi' \circ \theta_2 \circ \varphi_2$.

Donc les mots $(\theta_1 \circ \varphi_1(g_0))(\theta_2 \circ \varphi_2(g_0))^{-1}$ sont dans le noyau de ψ'.

Par suite $\mathrm{Ker}(\psi')$ contient N et ψ' se factorise donc en ψ. ■

Proposition 2.6 Pour qu'un mot soit dans N, il fut et il suffit qu'on puisse le réduire au mot vide en effectuant les deux manipulations suivantes :

- remplacer un mot de type $\varphi_1(g_0)$ par $\varphi_2(g_0)$ et inversement
- remplacer $g_i g_i'$ par leur produit.

2.4 Énoncé du théorème

Soit X un connexe par arcs. On suppose que $X = X_1 \cup X_2$ avec X_1 et X_2 sont ouverts.

X_1, X_2 et $X_0 = X_1 \cap X_2$ sont connexes par arcs. On fixe $x_0 \in X_0 = X_1 \cap X_2$.

Les inclusions $X_0 \hookrightarrow X_1$, $X_0 \hookrightarrow X_2$, $X_0 \hookrightarrow X$, $X_1 \hookrightarrow X$ et $X_2 \hookrightarrow X$ forment le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \Pi(X_1, x_0) \arrow[dr, "\pi(X_1 \hookrightarrow X)", "\psi_1"'] & \\
\Pi_1(X_0, x_0) \arrow[ur, "\pi(X_0 \hookrightarrow X_1)", "\varphi_1"'] \arrow[dr, "\varphi_2", "\pi(X_0 \hookrightarrow X_2)"'] & & \Pi_1(X, x_0) \\
 & \Pi(X_2, x_0) \arrow[ur, "\psi_2", "\pi(X_2 \hookrightarrow X)"'] &
\end{tikzcd}$$

On a $\psi_1 \circ \varphi_1 = \psi_2 \circ \varphi_2$.

On applique la propriété universelle : on a un morphisme ψ qui va de $\Pi_1(X_1, x_0) \underset{\Pi_1(X_0,x_0)}{*} \Pi_1(X_2, x_0)$ dans $\Pi_1(X, x_0)$.

<u>THÉORÈME 2.7</u> VAN-KAMPEN *ψ est un isomorphisme.*

COROLLAIRE 2.1 *Dans les hypothèses du théorème, si X_1 et X_2 sont simplement connexes, alors X aussi.*

Si X_0 est simplement connexe alors $\Pi_1(X, x_0) \simeq \Pi_1(X, x_0) * \Pi_1(X_2, x_0)$.

Remarque 2.2

- *On a la même version du théorème avec des fermés.*
- *Pour le huit, le Π_1 est $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.*
- *Par récurrence, la pâquerette à n pétales a $\underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{n \text{ fois}}$ pour Π_1.*
- *On rappelle que le quotient de $\Pi_1(X_1, x_0) * \Pi_1(X_2, x_0)$ par le sous groupe normal engendré par les mots $\{a^n.1, n \in \mathbb{N}\}$:*

$$\Pi_1(X_1, x_0) \underset{\Pi_1(X_0,x_0)}{*} \Pi_1(X_2, x_0) \simeq \frac{L(a) \times L(b)}{L(a) \times \{b^0\}} \simeq L(b)$$

Démonstration de la surjectivité dans Van-Kampen.

Lemme 2.7.1 (Nombre de Lebesgue)
Soit Y un espace métrique compact, $(V_j)_{j \in J}$ un recouvrement par des ouverts de Y.

Il existe $\varepsilon > 0$ (nombre de Lebesgue) tel que toute boule de rayon $r \leqslant \varepsilon$ soit contenue dans un V_j.

Démonstration. Par l'absurde, si $y \in Y$ il existe un indice $j(y)$ tel que $y \in V_{j(y)}$.

Il existe aussi une boule $B(y, \alpha(y)) \subset V_{j(y)}$ car les V_j sont ouverts.

Si l'énoncé n'est pas correct, il existe une suite de boules $B(y_n, \frac{1}{n})$ tel que chaque $B(y_n, \frac{1}{n})$ n'est contenue dans aucun ouvert V_j.

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer (compacité) que y_n converge vers un certain y.

Pour $n \geqslant N$, $d(y_n, y) < \frac{1}{2}\alpha(y)$, et $\frac{1}{N} < \frac{1}{2}\alpha(y)$. On a alors $B(y_N, \frac{1}{N}) \subset B(y, \alpha(y))$. ∎

Lemme 2.7.2
Soit $X = X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2 = X_0 \ni x_0$, comme dans Van-Kampen.

Soit $\gamma : [0,1] \to X$ un lacet. Alors γ est homotope à la mise bout à bout de lacets $\gamma_1 \cdots \gamma_p$, où chaque γ_i a son image dans X_1 ou X_2.

Démonstration. On considère le recouvrement du compact $[0,1]$ par les ouverts $\gamma^{-1}(X_1)$ et $\gamma^{-1}(X_2)$.

Par le lemme précédent, pour n assez grand, $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}] \subset \gamma^{-1}(X_1)$ ou $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}] \subset \gamma^{-1}(X_2)$.

On note $x_k = \gamma(\frac{k}{n})$ et on choisit un chemin γ'_k qui va joindre x_k à x_0 tel que

- si $x_k \in X_1$ on demande que γ'_k soit tracé dans X_1.
- si $x_k \in X_2$, on demande que γ'_k soit tracé dans X_2.

En particulier, si $x_k \in X_0$ on demande que γ'_k soit dans $X_1 \cap X_2$.

$\gamma|_{[0,\frac{1}{n}]}$ donne un chemin allant de x_0 à x_1 par exemple $x_1 \in X_0$.

On écrit alors $\gamma = (\gamma|_{[0,\frac{1}{n}]}\gamma'_1)(\gamma_1'^{-1}\gamma_2\gamma'_2)\cdots\}$. ∎

Un élément dans $\Pi(X_1, x_0)$ est un mot abstrait $\gamma_1^1\gamma_2^1\gamma_1^2\cdots$.

La mise bout à bout dans X de γ_1^1 puis γ_2^1 est un lacet. On appelle ψ' l'application qui passe du mot au lacet. Le lemme dit exactement que ψ' est surjective. Par passage au quotient $\psi = \overline{\psi'}$ est surjective. ∎

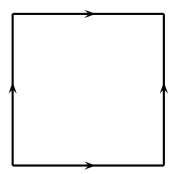
Exemple 2.3

- Deux sphères tangentes. Si $X = X_1 \cup X_2$ sont sous les hypothèses de Van-Kampen, qui sont simplement connexes, alors X aussi.
- Avec trois sphères tangentes c'est plus délicat. On utilise Van-Kampen en séparant un oeuf à la coque (avec support triangulaire) et le reste, puis on réapplique Van-Kampen à l'oeuf à la coque (son Π_1 est un cercle). On trouve finalement $\mathbb{Z}$.

- Avec trois cercles, on obtient un groupe fondamental qui est le quotient de $(L(a) * L(b)) * (L(c) * L(d))$ par le sous-groupe N qui est ici le $\{1\}$. Ainsi l'intersection X_0 est simplement connexe.

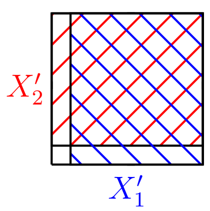
2.5 Groupe fondamental et construction de tores

On voit ici le tore (habituel) $\mathbb{T}^2$ comme le quotient du carré par la relation d'équivalence :



On considère $X' = [0,1]^2 \backslash]0, \varepsilon[^2$. Le tore troué est l'image par la projection p de X'.

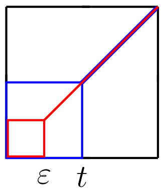
On note $X'_1 = \{(x,y) \in X', x \geqslant \varepsilon\}$ et $X'_2 = \{(x,y) \in X', y \geqslant \varepsilon\}$. On pose aussi $X_1 = p(X'_1)$ et $X_2 = p(X'_2)$.



Si $X'_0 = X'_1 \cap X'_2$, $X_0 = p(X'_0)$ est homéomorphe à un carré donc simplement connexe.

Par Van Kampen, le Π_1 du tore troué est $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ $(L(a) * L(b))$ avec a la projection du lacet $\{1\} \times [0,1]$ et b celle de $[0,1] \times \{0\}$.

On veut exprimer dans $L(a) * L(b)$ le lacet qui constitue le bord du trou. Attention, ça ne correspond pas au bord de $[0, \varepsilon]^2$, mais au lacet rouge (à orienter) suivant vu que le point de base est $(1,1)$.



Notons γ_t le lacet bleu ci-dessus. $(t,s) \mapsto \gamma_t(s)$ est une homotopie entre le lacet bord et le lacet qui fait le tour du carré : $bab^{-1}a^{-1} = [b,a]$.

La classe d'homotopie du lacet bord est égale à celle de $[b,a]$.

On construit le tore T' à 2 trous comme le collage d'un tore troué avec son symétrique en collant selon le bord du trou.

Par Van Kampen, on a $\Pi_1(T',*) = L(a,b)$ amalgamé avec $L(c,d)$. Or on identifie $[b,a]$ avec $[d,c]^{-1}$ (car on a pas les mêmes orientations).

On a donc :

$$\Pi_1(T',*) = \frac{L(a,b) * L(c,d)}{\langle [a,b][c,d] \rangle}$$

Chapitre 3

Théorie élémentaire des revêtements

On va considérer des espaces topologiques qui seront séparés et des applications linéaires qui seront continues.

3.1 Rappels

Définition 3.1 $p : E \to B$ est un homéomorphisme local ssi pour tout $x \in E$ il existe un voisinage V de x tel que $p : V \mapsto p(V)$ soit un homéomorphisme.

Remarque 3.1 Si p est un homéomorphisme global, alors il induit un homéomorphisme local en tout point.

Proposition 3.1

- Tout homéomorphisme local est ouvert.
- La réciproque est fausse (prendre $z \mapsto z^2$ dans $\mathbb{C}$ est ouverte mais pas un homéomorphisme local en 0).
- Si $p : E \to B$ est un homéomorphisme local en tout point, et si $A \subset p(E)$, alors la restriction $p : p^{-1}(A) \to A$ est un homéomorphisme local en tout point.
- En particulier, si $b \in \mathrm{Im}(p)$ alors $p : p^{-1}(b) \to \{b\}$ est un homéomorphisme local en tout point et $p^{-1}(b)$ est un sous-espace discret dans E.

Remarque 3.2 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application différentiable de rang maximum en tout point (ie pour tout $x \in U$, $Df(x)$ est inversible).

f est un homéomorphisme local en tout point par le TIL.

3.2 Revêtements

Définition 3.2 Un revêtement est la donnée de $p : E \to X$ vérifiant : pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V_x de x tel que $p^{-1}(V_x)$ soit une union disjointe d'ouverts S_i tels que $p|_{S_i} : S_i \to V_x$ soit un homéomorphisme pour tout i.

X s'appelle la base du revêtement, E l'espace total, les S_i les feuillets et V_x des ouverts trivialisants (ou de trivialisation ou bien couverts).

Proposition 3.2 Si p est un revêtement alors :
- p est un homéomorphisme local en tout point
- p est surjective
- Pour tout $x \in X$, $p^{-1}(x)$ est un sous-espace discret de E.

Définition 3.3 L'espace topologique X s'identifie à l'espace topologique quotient $E/\sim$ avec $m \sim m'$ ssi $p(m) = p(m')$.

Si $x \in X$, $p^{-1}(x)$ s'appelle fibre de p au-dessus de x.

Remarque 3.3 Si $p : E \to X$ est un revêtement alors E et X ont les mêmes propriétés locales.

Exemple 3.1
- Si F est fini, on considère X un espace topologique et $E = X \times F$ muni de la topologie produit ainsi que la projection $X \times F \to X$.
  On peut prendre comme ouvert trivialisant X tout entier.
- $x \mapsto (x, \mathrm{e}^{2i\pi x})$ sur $\mathbb{R}$) est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans l'hélice circulaire de rayon 1 et de pas 1.
  On a $\exp = p_2 \circ F$.
- $z \mapsto z^n$ sur $\mathbb{S}^1$ sont des revêtements (observer le polygone régulier à n côtés $\times[0,1]$ où on recolle les deux extrémités en tournant de $\frac{1}{n}$ tour).

3.3 Principe de monodromie

Théorème 3.1 d'unicité des relèvements *Soit $p : E \to X$ un revêtement. On fixe des points de base $e_0, x_0 = f(e_0)$.*

Soit $f : Y \to X$ une application continue avec $f(y_0) = x_0$ et Y connexe.

S'il existe $f' : Y \to E$ tel que $f(y_0) = e_0$ et $p \circ f' = f$ alors f' est unique et s'appelle relèvement de f.

Démonstration. Soit f'' qui marche. On pose $A = \{y \in Y, f'(y) = f''(y)\}$.

$y_0 \in A$ donc $A \neq \varnothing$. De plus A est fermé car c'est l'image réciproque de $\{0\}$ par $f' - f''$ qui est continue.

Soit $y_1 \in A$. $f(y_1) \in X$ donc $f(y_1)$ est contenu dans un ouvert trivialisant U.

Il y a un feuillet S qui contient $f'(y_1) = f''(y_1)$.

$p|_S : S \to U$ est un homéomorphisme donc $p|_{\mathbb{S}}^{-1} : U \to S$ a un sens et $p \circ f' = p \circ f''$ donc $f' = f''$ au voisinage de y.

Donc A est ouvert. Par connexité, $A = Y$. ■

Théorème 3.2 de relèvement des chemins *Soit $p : E \to X$ un revêtement. Soit $\sigma : [0,1] \to X$ un chemin $\sigma(0) = x_0$.*

Il existe $\sigma' : [0,1] \to E$ un relèvement de σ, avec $\sigma'(0) = e_0$ tel que $p \circ \sigma' = \sigma$. De plus, il y a unicité.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, "\sigma'"] \arrow[r, "\sigma"'] & X \end{tikzcd}$$

Démonstration. L'unicité a été vue avant. On montre l'existence en deux étapes.

- Tout d'abord, on suppose que l'espace X est un ouvert trivialisant. Ici la restriction de p à n'importe quel feuillet S_i est un homéomorphisme sur X.
  Soit S_0 le feuillet qui contient le point base e_0. On prend $\sigma' = p^{-1}|_{S_0} \circ \sigma$ qui convient.
- Dans le cas général, par compacité de $[0,1]$ et donc de $\sigma([0,1])$, on peut trouver une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ telle que pour chaque i, $\sigma([t_i, t_{i+1}])$ soit contenu dans un ouvert trivialisant noté U_i.
  On se restreint au revêtement $p|_{p^{-1}(U_0)} : p^{-1}(U_0) \to U_0$ qui a un ouvert trivialisant qui est toute l'image.
  On peut relever la restriction $\sigma|_{[t_0,t_1]} : [0, t_1] \to U_0$, en un chemin $\sigma' : [t_0, t_1] \to p^{-1}(U_0)$ avec $\sigma'_1(0) = e_0$ et $p \circ \sigma'_1 = \sigma|_{[t_0,t_1]}$.
  Supposons que l'on ait construit un relèvement σ'_i de $\sigma|_{[0,t_i]}$ avec toujours $\sigma'_i(0) = e_0$. On va réinvoquer le cas 1 en considérant
  $$p|_{p^{-1}(U_i)} : p^{-1}(U_i) \to U_i,$$
  où U_i contient $\sigma([t_i, t_{i+1}])$.
  On peut relever $\sigma|_{[t_i,t_{i+1}]}$ en un chemin $\sigma''_i : [t_i, t_{i+1}] \to p^{-1}(U_i)$ avec condition aux points base $\sigma''_i(t_i) = \sigma'_i(t_i)$.
  On construit σ'_{i+1} comme suit :
  $$\sigma'_{i+1}|_{[0,t_i]} = \sigma'_i$$
  $$\sigma'_{i+1}|_{[t_i,t_{i+1}]} = \sigma''_i$$

σ'_{i+1} est un relèvement de $\sigma|_{[0,t_{i+1}]}$, on termine avec $i = n-1$. ■

Exemple 3.2 $x \mapsto \mathrm{e}^{2i\pi x}$ de $\mathbb{R}$ dans le cercle, avec point base $e_0 = 0$ et $x_0 = 1$ dans le cercle. Le lacet

$$\sigma : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{S}^1 \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{2i\pi t} \end{cases}$$

a pour relevé dans $\mathbb{R}$ le chemin identité de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

3.4 Relèvement des homotopies

3.4.1 Énoncé

<u>Théorème 3.3</u> de relèvement des homotopies *On considère $p : E \to X$ un revêtement, $x_0 = p(e_0)$. Soit*

$$f : \begin{cases} Y & \to & X \\ y_0 & \mapsto & x_0 = f(e_0) \end{cases}$$

continue possédant un relèvement f'.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "f'"] \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

avec $f'(y_0) = e_0$ et $p \circ f' = f$. Alors toute homotopie $F : Y \times [0,1] \to X$ partant de f, ie

$$F(y,0) = f(y)$$
$$F(y_0,t) = x_0$$

se relève en une homotopie $F' : Y \times [0,1] \to E'$ tel que $F'(y,0) = f'(y)$ et $F'(y_0,t) = e_0$, et $p \circ F' = F$.

Corollaire 3.1 *On a $p : E \to X$ un revêtement, e_0 un point base et $x_0 = p(e_0)$.*

Soient σ et $\tau : [0,1] \to X$ ayant mêmes extrémités. Soient σ' et τ' des relèvements de σ et τ, avec $\sigma'(0) = e_0 = \tau'(0)$.

Si σ et τ sont homotopes à extrémités fixes alors σ' et τ' aussi. (Noter qu'en particulier σ' et τ' ont même point d'arrivée)

Démonstration du corollaire. Soit F une homotopie entre σ et τ le théorème de relèvement des homotopies nous donne une application F'. On doit vérifier que F est une homotopie à extrémités fixes entre σ' et τ'.

Il reste une seule chose à vérifier : $F'(s,1)$ ne dépend pas de s.

On sait que $p \circ F'(s,t) = F(s,t)$ donc $p \circ F'(s,1) = F(s,1) = x_1 = \sigma(1) = \tau(1)$.

Comme p est un homéomorphisme local, $F'(s,1)$ est localement constante. Comme elle est continue, elle est constante. Donc $F'(s,1)$ est constante ce qui indique que F' est une homotopie à extrémités fixes. ∎

3.4.2 Démonstration du théorème de relèvement

Premier cas

Supposons qu'il y ait un seul ouvert de trivialisation. On prend comme précédemment $F' = p^{-1}|_S \circ F$ où $p|_S$ est la restriction de p au feuillet qui contient le point base e_0.

Deuxième cas

Par compacité pour chaque point $y \in Y$, on peut trouver une partition (dépendant de y, y compris le nombre d'intervalles) $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$, et un voisinage N_y de y tels que l'homotopie F envoie $N_y \times [t_i, t_{i+1}]$ dans un même ouvert de trivialisation contenant $F(y, t_i)$.

On répète le deuxième cas

de la preuve du théorème de relèvement des chemins pour construire un relèvement de la restriction $F :_{N_y \times [0,1]} : N_y \times [0,1] \to X$ que l'on note $F' : N_y \times [0,1] \to E$ (en principe on devait indicer F' par y).

On se donne deux relèvements locaux F'_1 et F'_2 de F construits sur $N_{y_1} \times [0,1]$ et $N_{y_2} \times [0,1]$. Si $N_{y_1} \cap N_{y_2}$ est non vide, on choisit $y_3 \in N_{y_1} \cap N_{y_2}$.

On regarde $F|_{y_3 \times [0,1]}$. On a deux relèvements $F'_1|_{y_3 \times [0,1]}$ et $F'_2|_{y_3 \times [0,1]}$ qui coïncident en $(y_3, 0)$.

Comme $y_3 \times [0,1]$ est connexe on peut appliquer le théorème d'unicité. Donc F'_1 et F'_2 coïncident sur $y_3 \times [0,1]$.

Comme ceci est valable pour tout $y_3 \in N_{y_1} \cap N_{y_2}$, on a alors que ces deux relèvements définissent une application sur $N_{y_1} \cup N_{y_2}$.

On construit ainsi F' sur $Y \times [0,1]$ sur tout entier.

Corollaire 3.2 *On a $p : E \to X$ un revêtement, $x_0 = p(e_0)$.*

Le morphisme $\pi(p) : \Pi_1(E, e_0) \to \Pi_1(X, x_0)$ est injectif.

Démonstration. Soit σ' un lacet de E (basé en e_0) dont la classe d'homotopie est dans le noyau de $\pi(p)$.

Ça veut dire que le lacet $p \circ \sigma' = \sigma$ est homotope au lacet constant x_0.

Par construction σ' est un relèvement de σ.

Si F est une homotopie entre σ et le lacet constant x_0, d'après le théorème de relèvement des homotopies, F se relève en F' qui sera une homotopie entre σ' et le lacet constant e_0.

Donc la classe de σ' est triviale et $\pi(p)$ est injectif. ■

3.5 Action du Π_1 sur la fibre d'un revêtement

Soit G un groupe et Z un ensemble. Une action de G sur Z est la donnée d'un morphisme de groupe $\rho : G \to \mathfrak{S}(J)$.

L'action est dite non triviale si l'image de ρ est distincte de $\{\mathrm{Id}_Z\}$.

Exemple 3.3

- Si h est un homéomorphisme de l'espace topologique X, h produit une action de $\mathbb{Z}$ sur X : à l'entier n on associe $\underbrace{h \circ \cdots \circ h}_{n \text{ fois}}$ pour n positif, et avec n négatif c'est pareil sauf que on a h^{-1} n fois.
  Les orbites de cette action sont les $\{h^n(x)\}$. L'objet des systèmes dynamiques est de décrire ces orbites.
- Si $\lambda = \mathrm{e}^{2i\pi\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$, on considère
$$h : \begin{cases} \mathbb{S}^1 & \to & \mathbb{S}^1 \\ z & \mapsto & \lambda z \end{cases}$$
  Si $\alpha \in \mathbb{Q}$ les orbites sont finies. Sinon, les orbites sont denses dans le cercle.
- $\mathfrak{S}_n$ agit sur $[\![1, n]\!]$.
- Le groupe linéaire réel agit de façon classique sur $\mathbb{R}^n$. Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, A s'identifie à un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ noté toujours A, ici $\rho(A)$ c'est la transformation linéaire $x \mapsto Ax$.
- Le groupe $O_n(\mathbb{R})$ agit sur la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$.
- Le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}$.
- Le groupe $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}\right\}$ est isomorphe au groupe des transformations affines et donc agit sur $\mathbb{R}$.

Si $\rho : G \to Z$ est une action de G sur $\mathbb{Z}$, le stabilisateur du point $z_0 \in \mathbb{Z}$ (pour cette action) est :

$$G_{z_0} = \{g \in G, \rho(g)(z_0) = z_0\}$$

C'est un sous-groupe de G, qui en général n'est pas normal.

On appelle G l'ensemble des transformations affines de $\mathbb{R}$. Le stabilisateur de l'origine c'est l'ensemble des applications linéaires. Il n'est pas distingué.

Définition 3.4 Une action est transitive si il n'y a qu'une seule orbite.

De façon équivalente pour tout choix de z_0, z_1 dans Z il y a un $g = g(z_0, z_1)$ tel que $\rho(g)z_0 = z_1$.

$p : E \to X$ un revêtement. X connexe par arcs, $x_0 = p(e_0)$.

On va montrer qu'il y a une action naturelle de $\Pi_1(X, x_0)$ sur la fibre $p^{-1}(x_0)$.

On prend $e \in p^{-1}(x_0)$, et σ un lacet en $x_0 \in X$.

D'après le théorème de relèvement des chemins il y a un unique relevé σ' de σ, d'origine e.

On décide que l'action de σ sur e est l'arrivée du chemin σ', i.e $\sigma'(1)$.

De plus d'après le théorème de relèvements des homotopies, l'extrémité $\sigma'(1)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de σ.

Finalement $[\sigma] \in \Pi_1(X, x_0)$ et à $e \in p^{-1}(x_0)$ on sait associer un autre élément de $p^{-1}(x_0)$. On le note $[\sigma]e$ ou abusivement σe.

Exemple 3.4

- On se donne $X, E = X \times \{1, 2, 3\}$.
  Si $p^{-1}(x_0) = \{e_0, e_1, e_2\}$ ici l'action est triviale, i.e que tout pour tout lacet σ on a $\sigma \cdot e = e$.
- $p : x \mapsto \mathrm{e}^{2i\pi x}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{S}^1$.
  On a $p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$.
  Si σ est un lacet dans $\mathbb{S}^1$ alors σ est homotope à un $\sigma_n : [0, 1] \to \mathbb{S}^1$ valant $t \mapsto \mathrm{e}^{2i\pi nt}$ qui est σ_1^n.
  Ici l'action de σ_n sur $k \in p^{-1}(1)$ est $\sigma_n k = k + n$.
- On considère $z \mapsto z^2$ un revêtement à deux feuillets. On regarde par exemple l'action de $\sigma_1 : [0, 1] \to \mathbb{S}^1$ égal à $t \mapsto \mathrm{e}^{2i\pi t}$ sur la fibre $p^{-1}(1) = \{1, 1\}$.
  On relève σ_1 en σ_1' avec condition initiale $e = 1$. On obtient $\sigma_1'(t) = \mathrm{e}^{i\pi t}$ dont l'arrivée est $\sigma_1'(1) = -1$.

Proposition 3.3 Soit $p : E \to X$ un revêtement. Si E est connexe par arcs, alors l'action de $\Pi_1(X_1, x_0)$ sur le fibré $p^{-1}(x_0)$ est transitive.

Démonstration. Soient e_1 et e_2 dans $p^{-1}(x_0)$.

On doit trouver σ tel que $\sigma e_1 = e_2$.

Soit $\gamma : [0, 1] \to E$ un chemin tel que $\gamma(0) = e_1$ et $\gamma(1) = e_2$.

Si $\sigma = p \circ \gamma$, alors σ est un lacet en x_0 dont le relevé d'origine e_1 est γ.

Avec les notations précédentes on a $\sigma' = \gamma$ et $\sigma'(1) = \gamma(1) = e_2$. Donc $\sigma e_1 = e_2$. ∎

3.5.1 Stabilisateurs

Soit $e \in p^{-1}(x_0)$.

Le stabilisateur de e sous l'action de $\Pi_1(X, x_0)$ est l'ensemble des classes d'homotopie de lacets σ, dont les relevés σ' e ont pour extrémité encore e.

Dit autrement c'est l'ensemble des σ tel que le relevé σ' d'origine e est un lacet en e. En utilisant l'injectivité de $\pi(p)$, on obtient :

Proposition 3.4 On suppose que E est connexe par arcs.

Le stabilisateur de l'élément $e \in p^{-1}(x_0)$ sous l'action de $\Pi_1(X, x_0)$ est le groupe $\pi(p)(\Pi_1(E, e))$ qui est isomorphe à $\Pi_1(E, e)$.

Proposition 3.5 Soit $p : E \to X$ un revêtement avec E connexe par arcs et $p^{-1}(x_0)$ fini (revêtement fini).

Alors $\mathrm{Card}(p^{-1}(x))$ ne dépend pas de x. De plus $\mathrm{Card}(p^{-1}(x_0))$ est l'index de l'image de $\pi(p)$ dans $\Pi_1(X, x_0)$.

Démonstration. Remarquons que si E est connexe par arcs, X aussi, car p est surjective.

Soit γ un chemin dans X allant de x_0 à x_1.

Si $e \in p^{-1}(x_0)$ on note γ'_e le relevé de γ d'origine e. Son arrivée est dans $p^{-1}(x_1)$.

Donc γ produit une application de $p^{-1}(x_0) \to p^{-1}(x_1)$.

Cette application a un inverse : on fait la même chose avec γ^{-1}, et en particulier $\mathrm{Card}(p^{-1}(x_0)) = \mathrm{Card}(p^{-1}(x_1))$. ■

3.6 Le groupe du revêtement

Définition 3.5 Soit $p : E \to X$ un revêtement.

Le groupe du revêtement G est le groupe des homéomorphismes de E qui sont compatibles avec p, c'est-à-dire $p \circ h = p$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p"] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "\mathrm{Id}_X"] & X \end{tikzcd}$$

Remarque 3.4 Si h est un homéomorphisme de E alors h est un homéomorphisme de revêtement si pour tout $x \in X$, $h(p^{-1}(x)) = p^{-1}(x)$.

Exemple 3.5

- On prend $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = \mathbb{S}^2/\{\pm 1\}$.
  Alors $p : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ la projection canonique est un revêtement à deux feuillets.
  Soit h un homéomorphisme de revêtement, $h : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ compatible avec p.
  Si $m \in \mathbb{S}^2$, alors $p^{-1}(p(m)) = \{m, -m\}$.
  Nécessairement, $h(m) \in \{m, -m\}$. On en déduit que h est soit Id ou $-\operatorname{Id}$.
  Ici le groupe G a deux éléments. De la même façon si $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ est le revêtement canonique, alors le groupe du revêtement a deux éléments.
- On revient à $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ qui $x \mapsto \mathrm{e}^{2i\pi x}$. Ici le groupe du revêtement est exactement le groupe des translations entières.
- Là, c'est $z \mapsto z^2$ du plan privé de l'origine dans lui-même.
  On a $p^{-1}p(z) = \{z, -z\}$. Si h est dans le groupe de revêtement alors $h(z) \in \{z, -z\}$, donc ici $G = \{\operatorname{Id}, -\operatorname{Id}\}$.
- $z \mapsto z^3$ (exercice).
- $E = X \times \{1, 2, 3\}$, et $p : E \to X$. Ici si h est un homéomorphisme de revêtement alors $h(x, k) = (x, k')$.
  Se donner h c'est se donner un élément de $\mathfrak{S}_3$. (On réarrange les étages)

<u>Théorème 3.4</u> fondamental *Soit $p : E \to X$ un revêtement, G le groupe du revêtement.*

Si E est simplement connexe et E est connexe par arcs localement et globalement, alors G est isomorphe à $\Pi_1(X, x_0)$.

Corollaire 3.3 *Pour $n \geq 2$, le groupe fondamental de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Corollaire 3.4 *Le groupe fondamental $\Pi_1(SO(3), \operatorname{Id})$ de $SO(3)$ est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et par suite $\Pi_1(GL^+(3), \operatorname{Id})$ est aussi $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Démonstration. On va construire une application $\chi : G \to \Pi_1(X, x_0)$. Il faudra montrer que c'est un morphisme.

Lemme 3.4.1
Soit Z un espace topologique simplement connexe. Soient deux chemins γ_0 et γ_1 ayant mêmes extrémités x_0 et x_1.

Alors γ_0 et γ_1 sont homotopes à extrémités fixes.

Démonstration. $\gamma_0\gamma_1^{-1}$ est un lacet, qui est homotope à un lacet trivial x_0.

Soit $\delta(s, t)$ une homotopie entre $\gamma_0\gamma_1^{-1}$ et x_0.

On a $\delta(0, \cdot) = \gamma_0\gamma_1^{-1}$ et $\delta(1, \cdot) = x_0$. Aussi $\delta(s, 0) = \delta(s, 1) = x_0$.

Pour chaque s la mise bout à bout $\delta(s, \cdot)\gamma_1$ est un chemin partant de x_0 et terminant en x.

On a $\delta'_{s=0} = \gamma_0\gamma_1^{-1}\gamma_1 = \gamma_0$.
Aussi $\delta'_{s=1} =$ (lacet trivial x_0) $\cdot\gamma_1 = \gamma_1$.
δ' est donc une homotopie à extrémités fixes entre γ_0 et γ_1. ■

Soit ϕ un élément de G. Soit e_0 un point de base dans E. Par connexité par arcs, il y a un chemin γ_0 qui joint e_0 à $\phi(e_0)$.

Si γ_1 est un autre chemin joignant e_0 à $\phi(e_0)$, d'après le lemme (simple connexité de E) alors γ_0 et γ_1 sont homotopes à extrémités fixes.

Le projeté $p(\gamma_0)$ de γ_0 est un lacet de X en $x_0 = p(e_0)$. Pareil avec $p(\gamma_1)$ en mettant des 1.

Si $\delta(s,t)$ est une homotopie à extrémités fixes entre γ_0 et γ_1 alors $p(\delta)$ est une homotopie entre les lacets $p(\gamma_0)$ et $p(\gamma_1)$.

Donc la classe d'homotopie de $p(\gamma_0)$ ne dépend pas du choix de γ_0. On décide d'associer à ϕ la classe d'homotopie de $p(\gamma_0)$. on obtient une application

$$\chi : \begin{cases} G & \to & \Pi_1(X, x_0) \\ \phi & \mapsto & [p(\gamma_0)] \end{cases}$$

Lemme 3.4.2
χ est un morphisme de groupes.

Démonstration. Soient ϕ_1 et ϕ_2 dans G. On note $\sigma_1 = p(\gamma_1)$ et $\sigma_2 = p(\gamma_2)$. ■

On introduit $\gamma_2' = \phi_1(\gamma_2)$. On se rappelle que $p\circ\phi_1 = p$ donc $p(\gamma_2') = p(\gamma_2)$.

γ_2' a pour extrémités $\phi_1(e_0)$ et $\phi_1 \circ \phi_2(e_0)$.

On remarque que la mise bout à bout de γ_1 suivi de $\phi_1(\gamma_2)$ produit un chemin allant de e_0 à $\phi_1 \circ \phi_2(e_0)$.

On a $\chi(\phi_1 \circ \phi_2) = [p(\gamma')] \in \Gamma_1(X, x_0)$. On en déduit que χ est un morphisme, car $[p(\gamma')]$ apparaît comme mise bout à bout de $p(\gamma_1)$ et de $p(\gamma_2)$.

Lemme 3.4.3 fondamental
Soit $p : E \to E$ un revêtement, E connexe par arcs. Soit $h \in G$.
Si $h(e_0) = e_0$ alors $h = \mathrm{Id}_E$.

Démonstration. Unicité du relèvement de p. ■

Par conséquent, χ est injectif. En effet, si $h \in \mathrm{Ker}(\chi)$, $p(\gamma_0)$ est homotope au lacet constant x_0. Le chemin γ_0 est le relevé de $p(\gamma_0)$ avec départ en e_0.

$p(\gamma_0)$ et x_0 sont homotopes via δ.

L'homotopie δ se relève en $\widetilde{\delta} : p\circ\widetilde{\delta} = \delta$. En particulier, $\widetilde{\delta}$ est une homotopie entre γ_0 et e_0 (lacet constant).

Comme $\widetilde{\delta}$ est à extrémités fixes, $\gamma_0(1) = e_0$ et γ_0 est un lacet en e_0. Par construction, $h(e_0) = e_0$ donc $h = \mathrm{Id}$.

On montre maintenant la surjectivité. Soit σ un lacet en e_0.

On relève σ en γ_0 avec $\gamma_0(0) = e_0$. On décide que $h(e_0) = \gamma_0(1)$.

Soit $e \in E$. On prend un chemin γ reliant e_0 à e.

$p(\gamma)^{-1}\sigma p(\gamma)$ est un lacet en x. On relève ce lacet en x en un chemin ε de départ e et d'arrivée $\varepsilon(1)$.

On décide que $h(e) = \varepsilon(1)$. Cette manipulation ne dépend pas des choix de σ et γ mais seulement de leur classe d'homotopie.

On a donc construit h compatible avec la projection, tel que $p \circ h = p$. En échangeant le rôle de e_0 et $h(e_0)$, on vérifie que h est bijectif.

Il reste à montrer que h est continue. Montrons-le en e_0. Soit e voisin de e_0. e est dans un feuillet noté S_0.

Par locale connexité par arcs, on peut trouver un chemin γ joignant e_0 à e dans S_0.

Comme U est un ouvert trivialisant, $p|_{S_0} : S_0 \to U$ est un homéomorphisme de même que $p|_{S_1} : S_1 \to U$.

$p|_{S_1}^{-1} \circ p|_{S_0} : S_0 \to S_1$ est continu et vaut $h|_{S_0}$. Comme ce raisonnement est indépendant de e_0, on a la continuité de h. ■

<u>Théorème 3.5</u> *Soit $p : E \to X$ un revêtement, $f : Y \to X$ continue tels que $p(e_0) = x_0 = f(e_0)$.*

Alors f possède un relèvement $f' : Y \to E$ ssi $\mathrm{Im}(\pi(f)) \subset \mathrm{Im}(\pi(p))$.

Démonstration.

- $\Rightarrow$ Si f' existe, $p \circ f' = p$ donc $\pi(p \circ f) = \pi(p) \circ \pi(f') = \pi(f)$ donc $\mathrm{Im}(\pi(f)) \subset \mathrm{Im}(\pi(p))$.
- $\Leftarrow$ Il faut définir $f'(y)$ pour $y \in Y$.

  On commence par les points de base $f'(y_0) = e_0$.

  Soit γ joignant e_0 à y.

  On considère $f \circ \gamma$, chemin joignant x_0 à $f(y)$.

  On relève ce chemin en $\widetilde{\gamma}$ et on décide que $f'(y) = \widetilde{\gamma}(1)$.

  Il faut montrer que cette manipulation ne dépend pas de γ.

  Si δ est un autre chemin de y_0 à y, $\gamma\delta^{-1}$ est un lacet en y_0.

  Son image par f est la mise bout à bout de $f(\gamma)$ et $f(\delta^{-1})$.

  C'est encore un lacet dont la classe d'homotopie est dans $\mathrm{Im}(\pi(p))$/

  Le relevé de ce lacet est un lacet dans E donc $f'(y)$ ne dépend pas de γ. ■

Corollaire 3.5 *Soit $p : E \to X$ un revêtement et $f : Y \to X$ continue. Si Y est simplement connexe alors f possède un relèvement.*

Proposition 3.6 On se donne deux revêtements $p_1 : E_1 \to X$ et $p_2 : E_2 \to X$.

Alors il existe un homéomorphisme $\phi : E_1 \to E_2$ tel que $p_2 \circ \phi = p_1$.

On dit que p_1 et p_2 sont équivalents.

Démonstration. S'il existe $p : E \to X$ avec E simplement connexe, on regarde un ouvert trivialisant U et ses feuillets S_i.

Soit γ un lacet dans X dont l'image est contenue dans U (on l'appelle petit lacet), alors, si on relève γ par p,on obtient un lacet $\widetilde{\gamma}$ contenu dans un S_i.

Comme E est simplement connexe, $\widetilde{\gamma}$ est homotope au lacet trivial dans E.

En projetant par p, on obtient que le petit lacet est homotope au lacet trivial. ∎

<u>Théorème 3.6</u> *Si X est localement connexe par arcs, connexe et a ses petits lacets triviaux alors X a un revêtement simplement connexe.*

<u>Théorème 3.7</u> Riemann *Les seules surfaces (variétés topologiques de dimension 2) connexes et simplement connexes sont $\mathbb{S}^2$ et $\mathbb{R}^2$ à homéomorphisme près.*

Exemple 3.6

- Le revêtement universel de $\mathbb{T}^2$ est $\mathbb{R}^2$ via $(x, y) \mapsto (\mathrm{e}^{2i\pi x}, \mathrm{e}^{2i\pi y})$.
- Pour le tore à deux trous, on a Π_1 infini donc par simple connexité, $\mathrm{Card}(p^{-1}(x_0)) = \mathrm{Card}(\Pi_1(X, x_0))$
  Donc $p^{-1}(x_0)$ est infini donc E n'est pas compact sinon $p^{-1}(x_0)$ a des points d'accumulation et p ne serait pas un homéomorphisme local.
- Le revêtement universel de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ est $\mathbb{S}^2$.

<u>Théorème 3.8</u> Borsuk-Ulam *Soit $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ continue. Il existe au moins un point x_0 tel que $f(x_0) = f(-x_0)$.*

Démonstration.

- On suppose que $f(x) \neq f(-x)$ pour tout x.
  On considère $g : x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{\|f(x)-f(-x)\|}$.
- g produit une application de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ puisque $g(-x) = -g(x)$. On la note $\widetilde{g}$.
  On a $\widetilde{g} = p_1 \circ g \circ p_2^{-1}$ avec p_2^{-1} l'inverse local de p_2. Donc $\widetilde{g}$ est continue.
- On veut que $\widetilde{g}$ se relève de $\mathbb{P}^n \to \mathbb{S}^1$. Pour qu'il y ait un revêtement, il suffit que l'image de $\pi(\widetilde{g})$ soit contenue dans celle de $\pi(p)$.
  Comme $\mathbb{P}^1 = \mathbb{S}^1$, on a $\Pi_1(\mathbb{P}^1, \cdot) = \mathbb{Z}$.
  De plus, $\Pi_1(\mathbb{P}^2, \cdot) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ donc comme il n'y a pas de morphisme non trivial de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ alors $\mathrm{Im}(\pi(\widetilde{g})) = \{0\}$ implique qu'il existe q relèvement de $\widetilde{g}$ unique si les conditions initiales sont prescrites.
- Montrons que $g = q \circ p_n$.
  Par construction, $p_1 \circ g = \widetilde{g} \circ p_n$.

g est donc un relèvement de $\widetilde{g} \circ p_n$ donc $q \circ p_n$ et g sont deux relèvements de $\widetilde{g} \circ p_n$ avec même condition initiale donc $q \circ p_n = g$.

- On a donc $g(x_0) = g(-x_0)$, d'où la contradiction. ■

Chapitre 4

Actions de groupes et revêtements

Dans ce chapitre on va supposer les espaces métriques.

<u>Définition 4.1</u> Un groupe topologique G est un groupe muni d'une topologie $G \to G$ qui rend $g \mapsto g^{-1}$ continue.

Proposition 4.1 On prend $G \times G \to G$ qui rend $(g, h) \to g \cdot h$ continue.

Soit G un groupe topologique, et X un espace topologique.

En particulier pour chaque g fixé dans G, $X \to X$ qui $x \mapsto gx$ est un homéomorphisme dont l'inverse est $x \mapsto g^{-1}x$.

Exemple 4.1

- On regarde l'action du groupe linéaire réel sur $\mathbb{R}^n$ par translation à gauche.
- Celle de $\mathbb{Z}$ sur le cercle avec $z \mapsto e^{2i\pi n\theta}z$.
- Celle de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur la sphère S^n.

<u>Définition 4.2</u> Si G agit continûment sur X, on va noter X/G l'espace des orbites.

On dit que $x \in X$ et $x' \in X$ sont G-équivalents si les orbites $Gx = Gx'$.

X/G est donc l'espace quotient muni de la topologie quotient $p\colon X \to X/G$ est continue.

Proposition 4.2 Soit $G \times X \to X$ est une action continue du groupe topologique G sur l'espace topologique X.

Alors la projection $p\colon X \to X/G$ est ouverte.

Démonstration. On part d'un ouvert $V \subset X$, et on veut montrer que l'image par p est encore un ouvert, i.e $p^{-1}(p(V))$ est ouvert.

On a $p^{-1}(p(V)) = \{gV, g \in G\} = \bigcup_{g \in G} gV$.

Comme l'action est continue, les $x \mapsto gx$ sont des homéomorphismes. Donc chaque gV est ouvert et on a le résultat. ■

Proposition 4.3 Soit G un groupe topologique agissant sur l'espace topologique X.

Alors si X, G sont compacts l'espace X/G est séparé.

Remarque 4.1 *On fait agir le groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}^n$, par simple multiplication. L'espace quotient n'est pas séparé.*

Démonstration. Le graphe de la relation d'équivalence associée à l'action ce sont les couples de $X \times X$ qui sont en relation entre eux, i.e les (x, gx).

Notre espace X/G est séparé dès que son graphe est fermé.

L'espace $G \times X$ est compact, et le graphe c'est l'image de $(g, x) \mapsto (x, gx)$ qui est continue, du compact $G \times X$.

L'image est compacte donc fermée. ■

Définition 4.3 Soit G un groupe topologique agissant sur l'espace topologique X.

On dit que l'action est propre (ou que G agit proprement sur X) si pour tout compact K de X l'ensemble $G_K = \{g \in G, gK \cap K \neq \varnothing\}$ est relativement compact (c'est-à-dire contenu dans un compact).

Exemple 4.2

- L'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ par translation est propre.
  En effet pour le compact $[-N, N]$, l'ensemble des n tel que $[-N + n, N + n] \cap [-N, N] \neq \varnothing$ est fini, donc relativement compact.
- Soit $\theta \in \mathbb{R}$ auquel on associe l'action $(n, z) \mapsto \mathrm{e}^{2i\pi n\theta} z$ de $\mathbb{Z}$ sur le cercle, qui n'est pas propre (prendre $K = \mathbb{S}^1$).

Proposition 4.4 On a les propriétés :

1. Si G est compact et agit sur X alors l'action est propre.
2. Si G est discret et agit continûment sur X alors l'action de G sur X est propre si et seulement si pour chaque compact K, G_K est fini.

Démonstration.

1. Oui car n'importe quel sous-ensemble d'un ensemble compact est relativement compact.
2. Dans un espace discret les compacts sont des ensembles finis. ■

Théorème 4.1 *Soit G un groupe discret agissant continûment sur l'espace topologique X.*

On suppose que l'action propre et que X est localement compact.

Alors les orbites G_x sont fermées et discrètes, et l'espace quotient séparé.

Démonstration. Soient $x, y \in X$. Soit V un voisinage compact de X (relative compacité).

Comme l'action est propre et G est discret, l'ensemble G_V est fini et ceci implique que $Gy \cap V$ est fini.

Si on fixe y, on constate que Gy est fermée et discrète.

Pour la séparation, il suffit de vérifier encore que le graphe est fermé. ■

<u>Définition 4.4</u> Le groupe G agit librement (ou que l'action est libre, ou sans point fixe), si pour tout $x \in X$, le stabilisateur est trivial.

Dit autrement si on regarde à g fixé l'application $x \mapsto gx$, on a la propriété : si on a un point fixe alors $g = e$ neutre de g.

Il n'y a que e qui fixe des éléments.

Exemple 4.3

- L'action de $\mathbb{R}^n$ par translation sur $\mathbb{R}^n$ est une action libre.
- L'action du groupe linéaire par multiplication à gauche n'est pas libre.
- Celle de $\mathbb{Z}$ sur le cercle comme avant l'est si, et seulement si, $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- Le groupe des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec a non nul, agit sur $\mathbb{R}$ comme une application affine. Elle n'est pas libre.

Proposition 4.5 Soit G un groupe discret agissant continûment proprement et librement sur X topologique, localement compact.

Alors pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert V de x tel que

$$gV \cap V = \varnothing$$

pour tout $g \neq e$ neutre de G.

Exemple 4.4 L'action de $\mathbb{Z}$ par translation sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $x \in X$, l'orbite Gx est fermée discrète. Par locale compacité il existe un voisinage compact K de x tel que $Gx \cap K = \{x\}$.

Puisque G agit proprement sur X, l'ensemble G_K des $g \in G$ tel que $gK \cap K \neq \varnothing$ est fini.

On introduit $W = K \setminus K \cap \left(\bigcup gK\right)$ pour les $g \in G_K \setminus \{e\}$. Alors $x \in W$.

En effet, si $x \notin W$, c'est que $x \in K \cap \left(\bigcup gK\right)$. En particulier, il existe $y \in K$ et un $g \in G_K \setminus \{e\}$ tel que $x = gy$.

Donc $y = g^{-1}x$, or comme $Gx \cap X = \{x\}$, on en déduit que $y = x$, donc $g^{-1}x = x$ avec $g \neq e$ d'où une contradiction.

K est un voisinage compact de x. Donc W est un voisinage de x et satisfait $gW \cap W = \varnothing$.

On prend V un voisinage ouvert de x contenu dans W. Alors V satisfait l'énoncé. ■

COROLLAIRE 4.1 *Sous les mêmes hypothèses que dans la proposition, et les mêmes notations, alors si $y \in V$, y est l'unique représentant de l'orbite Gy dans V.*

COROLLAIRE 4.2 *Sous les mêmes hypothèses, l'application surjective canonique $p\colon X \to X/G$ est un homéomorphisme local en tout point.*

Démonstration. Si $p\colon X \to X/G$ est continue, surjective et ouverte, $x \in X$, et V est comme dans la proposition, alors $p(V)$ est un ouvert (application ouverte), et $p|_V\colon V \to p(V)$ est une bijection. De plus $p|_V$ est un homéomorphisme local. ■

THÉORÈME 4.2 *Soit G un groupe discret agissant continûment proprement et librement, sur X localement compact.*

L'application $p\colon X \to X/G$ est un revêtement. De plus, pour chaque élément du groupe g fixé, les homéomorphismes $x \mapsto gx$ sont dans le groupe du revêtement.

Démonstration. On prend $x_0 \in X$, on le projette $p(x_0) \in X/G$, et on regarde la fibre $p^{-1}(p(x_0))$, i.e l'orbite de x_0, qui est discrète.

Soit V voisinage de x_0 comme dans la proposition d'avant.

On observe que $p^{-1}(p(V)) = \bigcup_{g\in G} gV$ qui est une union disjointe (sinon, si il y en a deux qui s'intersectent, on fait agir g_1^{-1} et on obtient $g_1^{-1}g_2 = e$).

Les gV sont des ouverts car les $x \mapsto gx$, à g fixé, sont des homéomorphismes. Il nous reste à vérifier que les restrictions de p, $p|_{gV}\colon gV \to p(gV) = p(V)$ sont des homéomorphismes (corollaire). On le sait lorsque $g = e$.

On décompose $p|_{gV}\colon gV \to p(V)$ de la façon suivante : $gV \to V \to p(V)$, la deuxième flèche c'est $p|_V$ et la première c'est la multiplication par g^{-1}. C'est donc la composée de deux homéomorphismes locaux, donc un homéomorphisme.

Donc $p(V)$ est un ouvert trivialisant. ■

THÉORÈME 4.3 *Soit H un sous-groupe discret d'un groupe G, topologique (métrique) localement compact.*

On considère la relation d'équivalence à gauche $x \sim y$ ssi $y = h \cdot x$ avec $h \in H$. L'espace quotient est noté $H\backslash G$.

La projection $p\colon G \to H\backslash G$ est un revêtement.

Démonstration. On a une action de H sur G, qui est continue puisque G est un groupe topologique. L'action est libre puisque si $hx = x$ alors h est neutre.

Soit K un compact dans G. Soit $h \in H$ tel que $hK \cap K \neq \varnothing$.

Pour un tel h il y a deux éléments g_1 et g_2 dans $K \subset G$ tels que $hg_1 = g_2 \Rightarrow h = g_2 g_1^{-1}, g_i \in K$, i.e $h \in KK^{-1}$.

K compact implique :

– K^{-1} est compact

– KK^{-1} est aussi compact dans G.

Comme H est discret $KK^{-1} \cap H$ est fini. H_K est fini et l'action est propre. ■

Exemple 4.5

- $\mathbb{S}^1$ c'est $\mathbb{R}$ quotienté par $\mathbb{Z}$ à gauche ou à droite.
- $\mathbb{T}^2$ c'est pareil mais on met des carrés.
- On considère G le groupe de Heisenberg, engendré par les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. H c'est pareil mais on prend dans $\mathbb{Z}^3$.

Rappel. $p\colon E \to X$ un revêtement. On note $\operatorname{Aut} E$ les automorphismes du revêtement. On munit $\operatorname{Aut} E$ de la topologie discrète. Il agit sur E.

Proposition 4.6 On prend $p\colon E \to X$ revêtement avec E connexe par arcs. Le groupe du revêtement agit librement sur E.

Démonstration. $g \in \operatorname{Aut} E, e_0$ dans E tel que $ge_0 = e_0$. ■

<u>Théorème 4.4</u> *Soit G un groupe discret qui agit continûment, librement, proprement sur X (métrique) connexe par arcs, localement compact.*

Le groupe des automorphismes du revêtement $p\colon X \to X/G$ est isomorphe à G.

Démonstration. À chaque élément g de G est associé l'automorphisme de revêtement $x \mapsto gx$. On a donc une inclusion de G dans $\operatorname{Aut} E$ (car l'action est libre).

Soit $h \in \operatorname{Aut}(p\colon X \to X/G)$ et $x_0 \in X$.

$h(x_0)$ et x_0 sont dans la même fibre de p (car $p \circ h = p$), i.e x_0 et $h(x_0)$ sont dans la même classe d'équivalence, i.e il existe g tel que $gx_0 = h(x_0)$.

Les deux automorphismes de revêtement h et $g\colon x \mapsto gx$ coïncident en x_0 donc sont égaux. ■

Cas spécial. Si de plus X est simplement connexe alors le groupe fondamental est $\Pi_1(X/G,*)$ est isomorphe au groupe du revêtement qui est isomorphe à G.

Par exemple si G est le groupe de Heisenberg, et H comme avant, alors $\Pi_1(H\backslash G,*)$ est isomorphe à H.

Si s est un nombre premier, on a un morphisme de $H \to \mathfrak{M}_3(\mathbb{Z}/s\mathbb{Z})$ qui à une matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & p & q \\ 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

associe sa réduite modulo s. On définit $H(s)$ comme le noyau de ce morphisme.

On fabrique un nouveau sous-groupe discret de G et un nouveau quotient $H(s)\backslash G$.

Considérons maintenant $SL_2(\mathbb{Z})$. C'est un groupe discret dans $GL_2(\mathbb{C})$ qui est connexe et simplement connexe.

<u>Théorème 4.5</u> *Soit $p\colon E \to X$ revêtement, X métrique, E connexe par arcs, globalement.*

Le groupe $\operatorname{Aut} E$ opère librement proprement sur E. On a un nouveau revêtement $E \to E/\operatorname{Aut} E$ et il existe un homéomorphisme $F\colon E/\operatorname{Aut} E \to X$ tel que

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p'"] & X \\ E/\operatorname{Aut}(E) \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

4.1 Théorème de Perron Frobenius

<u>Théorème 4.6</u> *Soit M une matrice réelle $n \times n$ à coefficients strictement positifs.*

Alors M possède un vecteur propre à coefficients positifs. La valeur propre ρ associée est celle de module maximal.

Démonstration en dimension 2. On considère le bout de surface Σ incluse dans le premier cadran, comprise entre le cercle unité et le triangle $0,1,i$. On a $v \mapsto \frac{Mv}{\|Mv\|}$.

Comme Σ est homéomorphe au disque fermé, on peut appliquer le théorème de Brouwer.

Il existe v_0 tel que $\frac{Mv_0}{\|Mv_0\|} = v_0$. ∎

On prend $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tel que $h(\mathbb{S}^2) = \mathbb{S}^2$, alors $h(B(0,1)) = B(0,1)$.

<u>THÉORÈME 4.7</u> DE LA BOULE CHEVELUE *Sur $\mathbb{S}^2$, il n'y a pas de champ de vecteurs C^∞ qui ne n'annule pas en un point au moins.*

Remarque 4.2 *Ça marche avec seulement C^0.*

Démonstration. On note F le champ de vecteurs et on le suppose non nul.

$\frac{F}{\|F\|}$ est encore C^∞.

On pose :

$$\varphi_t(x) = \begin{cases} x + t\|x\|^2 F\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

et $\psi = (x,t) \mapsto (\phi_t(x), t)$.

ψ est au moins C^1 en 0 et C^∞ en dehors de 0.

On a $\psi(0,t) = (0,t)$ et $\psi(x,0) = (x,0)$ donc $D\psi(0,0) = \mathrm{Id}$. Par inversion locale, ψ est un difféomorphisme local.

Les hyperplans $t =$Cste sont préservés et chaque $x \mapsto \phi_t(x)$ est un difféomorphisme local pour t petit et x voisin de 0.

On a alors $\|\phi_t(x)\|^2 = \|x\|^2 + t^2\|x\|^4$, donc $\|\phi_t(x)\| = \|x\|\sqrt{1 + t^2\|x\|^2}$. En particulier, la sphère de rayon ρ est envoyée sur celle de rayon $\rho\sqrt{1+t^2\rho^2}$.

Donc pour ρ et t assez petits, l'image par ϕ_t de la boule $B(0,\rho)$ est $B(0, \rho\sqrt{1+t^2\rho^2})$.

Le volume de cette dernière boule vaut $\iiint_{B(0,\rho)} |\det J_{\phi_t}|$.

Comme la différentielle de ϕ_t est Id, le déterminant vaut 1, donc en restreignant t et ρ, on trouve :

$$\frac{4}{3}\pi\rho^3(1+t^2\rho^2)^{\frac{3}{2}} = P(t)$$

avec P un polynôme.

D'où une contradiction. ∎

Chapitre 5

Exercices

5.1 Chapitre 1

1. *Trouver un chemin entre deux points de* $\mathbb{R}^n$
   $t \mapsto ta + (1-t)b$ est un chemin entre a et b (dans $\mathbb{R}^n$).
2. *Même question dans* $\mathbb{R}^n$ *privé d'un nombre fini de points*
   Pour chercher un chemin dans $\mathbb{R}^n$ privé d'un nombre fini de points, on regarde les droites passant par a et de pente α. Comme il n'y a qu'un nombre fini de points, il existe α tel que la droite ne rencontre aucune de ces points. Par ce même argument, il existe c sur cette droite tel que (cb) ne rencontre aucun point. On a donc un chemin de a à b
3. *Même question dans* $\mathbb{S}^n$ *(sphère unité de* $\mathbb{R}^{n+1}$*)*
   $t \mapsto \frac{tx+(1-t)y}{\|tx+(1-t)y\|_2}$
4. *Dans* $\mathbb{R}^2$ *trouver un chemin entre* $(-1,0)$ *et* $(0,1)$ *sans passer par* $(0,0)$
   $t \mapsto (-\cos(\frac{t\pi}{2}), \sin(\frac{t\pi}{2}))$ convient.
5. *Donner une paramétrisation de* γ_0 *et* γ_1 *et d'une homotopie entre les deux, avec* γ_0 *le segment entre* $(0,0)$ *et* $(1,0)$ *et* γ_1 *la ligne brisée passant par* $(0,0)$*,* $(0,1)$*,* $(1,1)$ *et* $(1,0)$*.*

5.2 Chapitre 2

1. S_n^{++} est un ouvert connexe. $\Pi_1(S_n^{++}, \mathrm{Id})$ est trivial.
2. On a $GL_2(\mathbb{R}) \simeq SO_2 \times S_2^{++} \simeq \mathbb{Z} \times S_2^{++}$. Donc $\Pi_1(GL_2, \mathrm{Id}) = \mathbb{Z}$.
3. Si on a un morphisme entre un groupe fini dans $L(a)$ alors icelui est trivial.
4. Existe-t-il un morphisme de $\mathbb{Z}^2 \to L(a,b)$?

5. *Si $U \subset \mathbb{R}^2$ ouvert simplement connexe, est-ce que son adhérence l'est ?*

   Non, on peut prendre par exemple une couronne à laquelle on enlève un segment.

6. *Dans $\mathbb{R}^3$, on prend X_1 le complémentaire d'une droite et d'un cercle entourant la droite. Quel est son Π_1 ?*

   C'est homéomorphe à un produit $\mathbb{S}^1\times$ un demi-plan (coordonées cylindriques). Donc le groupe fondamental est $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$.

7. *Dans $\mathbb{R}^3$, on prend le complémentaire X d'un cercle. Quel est son Π_1 ?*

   On a $X = X_1 \cup X_2$ avec X_2 un cylindre ouvert entourant la droite de l'exo précédent.

   X_1 et X_2 sont des ouverts connexes donc connexes par arcs. De plus, $X_0 = X_1 \cap X_2$ est aussi connexe de Π_1 égal à $\mathbb{Z}$.

   On a donc par Van-Kampen : $\Pi_1(X) = (L(a) \times L(b))/L(c) \simeq L(a)$ car par inclusion c s'identifie à b.

8. *On prend le complémentaire X d'un cercle et d'une droite tel que la droite ne passe pas dans le cercle.* Π_1?

   Il existe deux plans parallèles P_1 , P_2 espacés de ε qui n'intersectent ni la droite ni le cercle et tel que le cercle soit à gauche de P_1 et la droite à droite de P_2.

   On prend X_1 le demi-espace à gauche de P_2 intersecté avec X et X_2 le demi-espace à droite de P_1 intersecté avec X.

   X_0 est la zone entre les deux plans. C'est simplement connexe.

   De plus, $X_1 \simeq \mathbb{R}^3$ privé d'un cercle donc $\Pi_1 \simeq \mathbb{Z}$ et $X_1 \simeq \mathbb{R}^3$ privé d'une droite donc $\Pi_1 \simeq \mathbb{Z}$.

   Donc $\Pi_1(X) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

9. *Quid de $\mathbb{R}^3$ privé de deux droites qui se coupent pas ?*

   C'est homéomorphe à $\mathbb{R}^2 \setminus \{x, y\} \times \mathbb{R}$. Donc le Π_1 est $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

10. *Quid de $\mathbb{R}^3$ privé de deux droites sécantes ?*

    C'est homéotope à la surface d'équation $z^4 + (xy)^2 = \varepsilon$ qui est homéotope à $\mathbb{S}^2$ privée de 4 points donc à $\mathbb{R}^2$ privé de trois points donc à une pâquerette à 3 pétales.

    Donc le Π_1 est $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

11. *On colle un disque sur le contour du ruban de Möbius.* Π_1 *?*

    On prend X_1 le disque, X_2 le ruban de Möbius, $X_1 \cap X_2$ est un cercle. Le Π_1 est donc $\{1\} \underset{\mathbb{Z}=L(b)}{*} \underbrace{\mathbb{Z}}_{L(a)}$. Or $b = 2a$ donc le Π_1 est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

    On en déduit que $\Pi_1(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

5.3 Chapitre 3

1. *Vérifier que* $x \mapsto \mathrm{e}^{inx}$ *est un revêtement, donner les ouverts de trivialisation et décrire les feuillets.*
2. *Idem avec* $z \mapsto z^2$
   $S_1 = \{z, \mathbb{R}e(z) > 0\}$ et $S_2 = \{z, \mathbb{R}e(z) < 0\}$.
   $\sigma|_{S_1}$ est une bijection continue donc sur tout compact, c'est un homéomorphisme, de même que σ_{S_2}.
   $U = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ est un ouvert trivialisant avec feuillets S_1 et S_2.
   De même, $V = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^+$ en est aussi un.
3. *La projection canonique* $\mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ *est un revêtement à* 2 *feuillets*
   Soit $p(x) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.
   p est surjective, continue et localement injective (injective sur tout voisinage suffisament petit d'un point de $\mathbb{S}^2$).
   Il existe un voisinage V_x de $p(x)$ tel que $p^{-1}(V_x)$ est l'union d'un voisinage suffisament petit de x et d'un de $-x$.
   On a alors un homéomorphisme local sur tout compact inclus dans chacun de ces deux voisinages donc p est un revêtement.
4. *Calcul de* $\Pi_1(SO_3, \mathrm{Id})$

   Lemme 5.0.1
   Soit $\varphi : (\mathbb{R}, +) \to (GL_n(\mathbb{R}), \times)$ un morphisme de groupes dérivable.
   Il existe A tel que $\varphi = \mathrm{e}^{\cdot A}$.
   En particulier, si $\varphi'(0) = 0$ alors $\varphi(t) = \mathrm{Id}$.

   Démonstration. On a $\varphi(t+s) = \varphi(t)\varphi(s)$. En dérivant par rapport à t, on a $\varphi'(t+s) = \varphi'(t)\varphi(s)$.
   Pour $t = 0$, on obtient $\varphi'(s) = \varphi(s)\varphi'(0)$.
   Donc $\varphi(s) = \mathrm{e}^{s\varphi(0)}$. ∎

   Le groupe $O(3)$ a deux composantes connexes. L'une c'est $SO(3)$, qui sont les matrices de déterminant 1, et l'autre c'est $\mathrm{diag}(1,1,-1)SO(3)$.
   On peut voir la sphère $\mathbb{S}^3$ comme un ensemble de quaternions de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$.
   On a $\mathbb{S}^3 = \{M \in \mathbb{H}, \det(M) = 1\}$.
   L'espace affine tangent en Id est l'espace affine des $(1, x_2, y_1, y_2)$. Vu dans $\mathbb{H}$, l'espace vectoriel associé est celui des matrices de trace nulle noté E.

Lemme 5.0.2
Si $x \in E$, $\mathrm{e}^{tx} \in \mathbb{S}^3$.

Démonstration. $\det(\mathrm{e}^{tx}) = \mathrm{e}^{t\,\mathrm{tr}(x)} = 1$. ■

Lemme 5.0.3
E est stable par conjugaison (car tr l'est). La conjugaison est de plus une isométrie et $g \mapsto \sigma_g$ est un morphisme C^∞ de noyau $\{\pm \mathrm{Id}\}$.

Démonstration. Comme $\|X\|^2 = \det(X)$ et que det et tr sont stables par conjugaison, c'est fini. ■

Démonstration. On vérifie que c'est un morphisme.
La différentiabilité, après choix de base orthonormée on se retrouve avec une application à valeurs dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ dont chaque composante est une formule en les variables x_1, y_1, x_2, y_2 du type polynôme sur déterminant. ■

Proposition 5.1 $\mathrm{Im}(\sigma) \subset SO_3$.

Démonstration. $\mathbb{S}^3$ est connexe et σ est continue donc son image est connexe. Comme $\sigma(I_2) = I_3$, l'image est incluse dans SO_3. ■

Proposition 5.2 $\exp : E \to \mathcal{S}^3$ est un difféomorphisme local en $0 \in E$.

Démonstration. On peut composer exp par la projection sur $\{x_1 = 0\}$ restreinte à $\mathbb{S}^3$.
Cette nouvelle application satisfait les hypothèses du TIL, c'est donc un difféomorphisme local.
Localement, $\mathbb{S}^3$ est le graphe de $\varphi : E \to \mathbb{R}$.
En posant $p^{-1} = (x_2, y_1, y_2) \mapsto (\varphi(x_2, y_1, y_2), x_2, y_1, y_2)$, on constate que exp est un difféomorphisme local d'un voisinage de $0 \in E$ dans un voisinage de Id dans $\mathbb{S}^3$. ■

Proposition 5.3 σ est surjective.

Démonstration. On a dit que σ est C^∞. On peut parler de sa différentielle.
Comme $\sigma(\mathbb{S}^3) \subset SO_3$, $D\sigma(\mathrm{Id})(E)$ est inclus dans l'espace tangent $T_{\mathrm{Id}}(SO_3)$ à $S0_3$ en I_3.
Or $T_{\mathrm{Id}}(SO_3) = \mathrm{Ker}(D(M \mapsto M^t M)(\mathrm{Id})) = \mathrm{Ker}(M \mapsto M + t^M) = A_3$ (matrices antisymétriques)

Proposition 5.4 $D\sigma(\mathrm{Id})$ est injective.

Démonstration. Soit X dans son noyau et $\varphi = \sigma(\mathrm{e}^{\cdot X})$.
φ est un morphisme de groupes de $\mathbb{R} \to SO_3$ et :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0) D\sigma(\mathrm{Id}) \circ \frac{\partial \mathrm{e}^{tX}}{\partial t}(t=0) = D\sigma(X) = 0$$

car $X \in \mathrm{Ker}(\sigma)$.
Par ce qu'on a vu précédemment, si $\varphi(t) = \mathrm{Id}$, $\sigma(\mathrm{e}^{tX}) = \mathrm{Id}$ donc $\mathrm{e}^{tX} \in \mathrm{Ker}(\sigma) = \{\pm \mathrm{Id}\}$.
Pour $t = 0$, $\mathrm{e}^{tX} = \mathrm{Id}$ donc par connexité, $\mathrm{e}^{tX} = \mathrm{Id}$ donc $X = 0$ puisque exp est localement injective en 0. ■

On en déduit que $D\sigma(\mathrm{Id}) : E \to T_{I_3}(SO_3)$ est un isomorphisme.
σ est un morphisme de groupes continu qui est donc ouverte (TIL) en l'élément neutre de $\mathbb{S}^3$. Elle est donc ouverte partout (il suffit de considérer $\sigma(g_0 \cdot)$ en Id).
Son image dans SO_3 est donc ouverte. Comme elle est compacte, elle est aussi fermée. Par connexité de SO_3, $\mathrm{Im}(\sigma) = SO_3$.
Donc σ est surjective. ■

Par passage au quotient, on a $\mathbb{S}^3/\{\pm \mathrm{Id}\} \simeq SO_3$ via un morphisme de groupe qui est aussi un homéomorphisme.
Or $\mathbb{S}^3/\{\pm \mathrm{Id}\} \simeq \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$. Donc $\mathbb{S}^3$ est un revêtement à deux feuillets de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$.
On verra plus tard que $\Pi_1(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $n \geqslant 2$.
Conclusion : $\boxed{\text{On a donc } \Pi_1(SO_3, I_3) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.}$

COROLLAIRE 5.1 $\Pi_1(GL_3(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Démonstration. On a $GL_3^+(\mathbb{R}) \simeq SO_3 \times S_3^{++}$.
Or S_3^{++} est convexe donc contractile.
Donc $\Pi_1(GL_3^+(\mathbb{R})) \simeq \Pi_1(SO_3) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. ■

5. *Soit $p : E \to X$ un homéomorphisme local avec E, X compacts et connexes. Montrer que $p : E \to X$ est un revêtement*
   On va montrer que pour tout x, $p^{-1}(x)$ est fini et son cardinal est localement constant.
   - Si $p^{-1}(x_0)$ est infini, il existe $(e_i)_i \in E$ tel que $p(e_i) = x_0$ et $e_i \to \overline{e}$. On a donc $p(\overline{e}) = x_0$ et on a une contradiction avec la locale homéomorphismitude de p en x_0.

- On note $p^{-1}(x_0) = \{e_1(x_0), \cdots, e_n(x_0)\}$.
  Il existe V_i ouverts autour de $e_i(x_0)$ tel que $p|_{V_i}$ soit un homéomorphisme. On pose $U_i = p(V_i)$, $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ et $p^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^{n} V_i'$.
  Tout $x \in U$ admet un antécédent dans chaque V_i' donc on peut écrire $\mathrm{Card}(p^{-1}(x)) \geqslant \mathrm{Card}(p^{-1}(x_0))$.
- Réciproquement, supposons qu'il existe une suite $x_i \in U$ qui tend vers x_0 avec $\mathrm{Card}(p^{-1}(x_i)) > \mathrm{Card}(p^{-1}(x_0))$.
  $\{e_1(x_i), \cdots e_n(x_i)\}$ a n éléments et est contenu dans $p^{-1}(x_i)$. Pour chaque x_i, on peut donc trouver (par hypothèse) e_i' distinct des $e_j(x_i)$ tel que $p(e_i') = x_i$.
  Quitte à extraire de e_i' une suite convergente, on a $\lim\limits_{i\to+\infty} e_i' = e_0'$ avec par continuité $p(e_0') = x_0$.
  Donc $e_0' \in \{e_1(x_0), \cdots, e_n(x_0)\}$. Par symétrie, il est loisible de supposer $e_0' = e_n$. Comme p est un homéomorphisme localement en e_n, il y a contradiction car $e_n(x_i)$ et e_i' tendent vers e_n et ont même image. Donc $\mathrm{Card}(p^{-1}(x))$ est localement constant donc constant par connexité de E.
- On vérifie la définition de revêtement en chaque x_0. On prend V_i voisinage de e_i assez petit et tel que $p(V_i) = U_i$, $p|_{V_i}$ est un homéomorphisme et $p^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$.

6. *Relèvement de l'application $p : z \mapsto z^3$?*

   On a $h(z)^3 = z^3$ donc $h(z) \in \{z, jz, j^2 z\}$. On pose $U_0 = \{z, h(z) = z\}$, $U_1 = \{z, h(z) = jz\}$ et $U_2 = \{z, h(z) = j^2 z\}$.

   Ce sont des fermés disjoints d'union $\mathbb{C}^*$.

   Par connexité, h est une des applications Id, $j\,\mathrm{Id}$ ou $j^2\,\mathrm{Id}$.

   On peut faire pareil avec $z \mapsto z^n$

7. *Les translations $z \mapsto z + k$ sont dans le groupe du revêtement $z \mapsto \mathrm{e}^{2i\pi z}$ et en fait forment le groupe d'icelui.*

   Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ continue.

   Il existe $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue telle que $\exp \circ g = f$. Si f est C^∞, g aussi et si f est holomorphe, g aussi.

   Si $f(0) = 1$, on demande $g(0) = 0$.

   Soit $z \in \mathbb{C}$, on prend γ le segment $[0, x]$. On définit $g(z)$ comme l'extrémité de $f \circ \gamma$.

   Soit γ' un autre chemin joignant 0 à z. Par simple connexité de $\mathbb{C}$, γ et γ' sont homotopes à extrémités fixes donc $f \circ \gamma$ et $f \circ \gamma'$ aussi.

Par le théorème de relèvement, les relevés de $f \circ \gamma$ et $f \circ \gamma'$ dont homotopes à extrémités fixes donc ils ont même arrivée donc $g(z)$ est bien définie.

De plus g est continue via la fin de la preuve du théorème 3.4.

On a $\exp \circ g = f$ donc, comme exp est un C^∞-difféomorphisme sur un voisinage de tout z_0, g et C^∞ en z_0 ssi f l'est.

8. *Existe-t-il $h : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ continue telle que $h^2(z) = z$ et $h(1) = 1$?*

   On note $p : z \mapsto z^2$. $p \circ h = \mathrm{Id}$ donc $\pi(p) \circ \pi(h) = \mathrm{Id}$.

   Comme $\pi(p) = k \mapsto 2k$, un tel h n'existe pas donc on n'a pas de fonction racine carrée continue sur $\mathbb{C}^*$. (Idem pour les racines n-èmes)

5.4 Chapitre 4

1. La figure constituée de deux sphères tangentes intérieurement et celle avec deux autres extérieurement sont homotopes. Cependant, il n'y a aucun homéomorphisme de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui envoie l'une sur l'autre.
2. Π_1 *du tore à deux trous, privé d'un petit carré ?* $\mathbb{Z}^{*4}$.
3. *Revêtement universel d'une couronne ?*

   La couronne c'est $\mathbb{S}^1 \times I$ et le revêtement universel de $\mathbb{S}^1$ est $\mathbb{R}$.

   Donc le revêtement recherché est $\mathbb{R}^2$.
4. Soit $\rho \in \mathbb{C}$ avec $0 < |\rho| < 1$.

$$f : \begin{cases} \mathbb{Z} \times \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C}^* \\ (n, z) & \mapsto & \rho^n z \end{cases}$$

   est une action continue libre et propre d'un groupe discret.

   L'espace $\mathbb{C}^*/\rho$ s'identifie à un tore et $p : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*/\rho$ est un revêtement.

   Les compacts pour la topologie associée à l'image par

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1 & \to & \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \\ (\rho, \mathrm{e}^{i\theta}) & \mapsto & (\log(p), \mathrm{e}^{i\theta}) \end{cases}$$

   de la topologie usuelle sont les fermés inclus dans une couronne stricte.

   Les homothéties de rapport ρ^n sont dans le groupe de revêtement. Réciproquement, si h est dans le groupe de revêtement, on choisit $z_0 \in \mathbb{C}^*$, $h(z_0)$ doit être dans la même orbite que z_0.

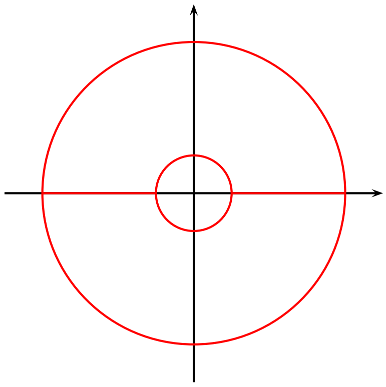
   Il existe donc $n \in \mathbb{Z}$ tel que $h(z_0) = \rho^n z_0$.

Les automorphismes de revêtement h et $z \mapsto \rho^n z$ coïncident en z_0 donc coïncident partout.

On peut donc se représenter le tore comme $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ (structure additive) ou comme $\mathbb{C}^*/\{\rho^n, n \in \mathbb{Z}\}$ (structure multiplicative).

5. On considère l'involution $z \mapsto -\frac{1}{\overline{z}}$ considérée comme une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

   Cette action est libre et stabilise la couronne C de rayons $\frac{1}{2}$ et 2.

   Le quotient de la couronne par $\langle\sigma\rangle$ est homéomorphe à la bande de Mœbius.

   $C \to$ Mœbius est un revêtement à deux feuillets.

   On remarque que le ruban est non orientable mais a un revêtement à deux feuillets orientable.

   On connaît aussi le revêtement à deux feuillets de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ (non orientable) par $\mathbb{S}^2$ qui l'est.

6. *Existe-t-il un revêtement à deux feuillets de $\mathbb{S}^1$ dans le huit ?*

   Non, à cause du point au milieu.

