TD 1 : Espaces vectoriels normés

Exercice 3 :
Comparaison de normes mixtes

On se place sur l'espace $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$. Pour $a \in [0,1]$ et $f \in E$, on pose :

$$N_a(f) = \int_0^a |f(t)|\,\mathrm{d}t + \sup_{x\in[a,1]} |f(x)|.$$

1. Montrer que pour tout $a \in [0,1]$, N_a est bien définie et qu'il s'agit d'une norme sur E.
2. Comparer N_a et N_b pour $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$.

Correction :

1. Cela découle facilement du fait que l'on somme la norme L^1 de la restriction de f à $[0,a]$ et la norme infinie de sa restriction à $[a,1]$.
2. Lorsque $a = b$, les normes sont égales, donc leur équivalence ne fait aucun doute ! On s'intéresse donc plutôt au cas $a < b$. Pour tout $f \in E$, on a

$$\begin{aligned} N_b(f) = \int_0^b |f(t)|\mathrm{d}t + \sup_{x\in[b,1]} |f(x)| &= \int_0^a |f(t)|\mathrm{d}t + \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t + \sup_{x\in[b,1]} |f(x)| \\ &\leqslant \int_0^a |f(t)|\mathrm{d}t + (b-a)\sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sup_{x\in[b,1]} |f(x)| \\ &\leqslant \int_0^a |f(t)|\mathrm{d}t + \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sup_{x\in[b,1]} |f(x)| \quad \text{car } b-a \leqslant 1. \end{aligned}$$

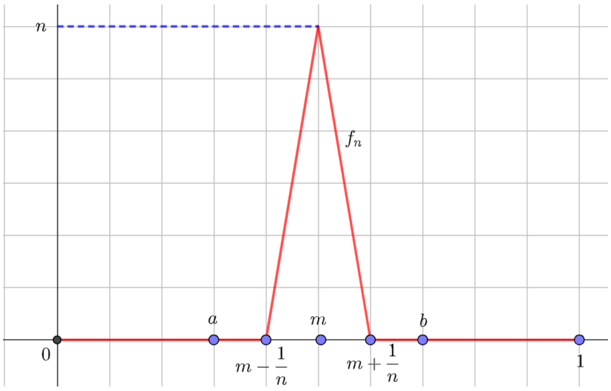
De plus, comme $[a,b] \subseteq [a,1]$ et $[b,1] \subseteq [a,1]$, on a

$$\begin{cases} \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \leqslant \sup_{x\in[a,1]} |f(x)| \\ \sup_{x\in[b,1]} |f(x)| \leqslant \sup_{x\in[a,1]} |f(x)| \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} N_b(f) &\leqslant \int_0^a |f(t)|\mathrm{d}t + 2\sup_{x\in[a,1]} |f(x)| \\ &\leqslant 2\int_0^a |f(t)|\mathrm{d}t + 2\sup_{x\in[a,1]} |f(x)| = 2N_a(f) \end{aligned}$$

On a donc montré que pour tout $f \in E$, $N_b(f) \leqslant 2N_a(f)$.
Montrons que par contre, il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $N_a \leqslant CN_b$.
Supposons par l'absurde qu'une telle constante existe, et considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ comme sur le dessin ci-dessous, où l'on a noté $m := \frac{a+b}{2}$ le milieu de $[a,b]$.



Les f_n sont continues (affines par morceaux) et pour n suffisamment grand, disons $n \geqslant n_0$, on a $a < m - \frac{1}{n} < m + \frac{1}{n} < b$. Alors pour tout $n \geqslant n_0$,

$$N_a(f_n) = \int_0^a |f_n(t)|\, dt + \sup_{x \in [a,1]} |f_n(x)| = 0 + n$$

tandis que

$$N_b(f_n) = \int_0^b |f_n(t)|\, dt + \sup_{x \in [b,1]} |f_n(x)| = 1 + 0 = 1$$

(le calcul de l'intégrale vient juste de la formule pour l'aire d'un triangle). Ainsi si l'on avait $N_a \leqslant C N_b$ alors pour tout $n \geqslant n_0$,

$$N_a(f_n) = n \leqslant C = C N_b(f_n)$$

ce qui donne une contradiction dès que n est suffisamment grand.

$\square$

Exercice 4 :
Étrangetés en dimension infinie

1. On munit dans un premier temps $\mathbf{R}[X]$ de la norme

$$\left\| \sum a_k X^k \right\|_\infty := \sup_{k \in \mathbf{N}} |a_k|.$$

   Montrer que la suite $(X^n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée pour $\| \ . \ \|_\infty$. Peut-on en extraire une sous-suite convergente ?
2. Construire une norme sur $\mathbf{R}[X]$ telle que la suite $(X^n)_{n \in \mathbf{N}}$ tende vers 0 pour cette norme.
3. On fixe maintenant $P \in \mathbf{R}[X]$. Construire une norme sur $\mathbf{R}[X]$ telle que la suite $(X^n)_{n \in \mathbf{N}}$ tende vers P pour cette norme.

Correction :

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\|X^n\|_\infty = 1$, donc la suite $(X^n)_{n \geqslant 1}$ est bien bornée dans $\mathbf{R}[X]$ muni de cette norme.
   Montrons qu'on ne peut en extraire de sous-suite convergente. Si, par l'absurde, il existait une extractrice $\varphi \colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ et $P \in \mathbf{R}[X]$ tels que $\left\|X^{\varphi(n)} - P\right\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, alors : pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$1 \underset{(\star)}{=} \left\|X^{\varphi(n+1)} - X^{\varphi(n)}\right\|_\infty \leqslant \left\|X^{\varphi(n+1)} - P\right\|_\infty + \left\|P - X^{\varphi(n)}\right\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

d'où une contradiction. L'égalité $(\star)$ vient du fait que $\varphi(n+1) > \varphi(n)$, donc le polynôme $X^{\varphi(n+1)} - X^{\varphi(n)}$ n'a que deux coefficients non-nuls, égaux à 1 et -1.

2. On peut prendre la norme
$$\|P\|_1 := \int_0^1 |P(t)|\mathrm{d}t,$$
ou
$$\sup_{t\in[0,\frac{1}{2}]} |P(t)|$$
ou encore la norme suivante :
$$\left\|\sum_{k\geqslant 0} a_k X^k\right\| = \sum_{k\geqslant 0} \frac{|a_k|}{k+1}$$
qui sera pratique pour la question suivante.

3. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme quelconque. On note N son degré. On utilise la norme définie précédemment mais en prenant les coefficients des polynômes dans la base $(1, X, \dots, X^N, X^{N+1} - P, X^{N+2} - P, \dots)$ (qui est bien une base car les degrés sont échelonnés). Pour n assez grand, $\|X^n - P\| = \frac{1}{n+1} \to 0$.

Exercice 5 :
De l'importance du corps de base...
Considérons le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $E = \mathbf{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbf{Q}\}$ muni de
$$N_0(a + b\sqrt{2}) = |a + b\sqrt{2}| \quad \text{et} \quad N_\infty(a + b\sqrt{2}) = \max(|a|, |b|).$$
Les normes N_0 et N_∞ sont-elles équivalentes ? Commenter.

Correction : Pour tout $(a, b) \in \mathbf{Q}^2$,
$$|a + b\sqrt{2}| \leqslant |a| + \sqrt{2}|b| \leqslant (1 + \sqrt{2}) \max(|a|, |b|)$$
Donc $N_0 \leqslant (1 + \sqrt{2})N_\infty$. Montrons que par contre, il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $N_\infty \leqslant CN_0$. Pour cela, supposons qu'une telle constante existe et prenons une suite $(a_n)n \geqslant 0$ de rationnels qui converge vers $-\sqrt{2}$ pour la valeur absolue usuelle (ce qui est possible par densité de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$), et prenons $(b_n)_{n\geqslant 0}$ la suite constante égale à 1. Alors pour tout $n \geqslant 0$,
$$1 \leqslant \max(|a_n|, |b_n|) \leqslant C|a_n + b_n\sqrt{2}| = |a_n + \sqrt{2}|$$
ce qui donne une contradiction lorsque n tend vers l'infini car le membre de droite tend vers 0.

Exercice 11 :
Complétude de l'espace des suites convergentes
On note X le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ formé des suites à valeurs réelles qui sont convergentes. On munit X de la norme uniforme définie par
$$\forall u \in X,\ \|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbf{N}} |u_n|,$$
Montrer que $(X, \|\ \|_\infty)$ est complet.

Correction : Soit $(u^k)_{k\geqslant 0}$ une suite à valeurs dans X, c'est-à-dire que chaque u^k est une suite convergente $(u^k_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs réelles. On suppose que la suite $(u^k)_{k\geqslant 0}$ est de Cauchy :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N}, \forall k, \ell \geqslant n_0, \|u^k - u^\ell\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

— *Candidat limite :* Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors pour tout $k, \ell \geqslant n_0(\varepsilon)$,
$$|u_n^k - u_n^\ell| \leqslant \|u^k - u^\ell\|_\infty \leqslant \varepsilon$$
donc la suite $(u_n^k)_{k\geqslant 0}$ est de Cauchy dans $\mathbf{R}$ qui est complet, donc elle converge. On note u_n^∞ sa limite. Comme n était quelconque, nous avons bien défini une suite $u^\infty := (u_n^\infty)_{n\geqslant 0}$ (la suite des « limites ponctuelles » de la suite $(u^k)_{k\geqslant 0}$).

— *Convergence vers le candidat :* Montrons que $\|u^k - u^\infty\|_\infty \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors
$$\forall k, \ell \geqslant n_0(\varepsilon), \forall n \in \mathbf{N},\ |u_n^k - u_n^\ell| \leqslant \|u^k - u^\ell\|_\infty \leqslant \varepsilon$$
donc en laissant ℓ tendre vers l'infini, on en déduit que
$$\forall k \geqslant n_0(\varepsilon), \forall n \in \mathbf{N},\ |u_n^k - u_n^\infty| \leqslant \varepsilon$$
donc pour tout $k \geqslant n_0(\varepsilon)$, on a $\|u^k - u^\infty\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Ceci montre bien la convergence de $(u^k)_{k\geqslant 0}$ vers u^∞ pour la norme uniforme.

— *Le candidat appartient bien à X :* il nous reste à montrer que u^∞ est bien une suite convergente. Chaque u^k étant une suite convergente, on note $\ell_k \in \mathbf{R}$ sa limite :
$$\ell_k := \lim_{n\to\infty} u_n^k.$$
Montrons que la suite ℓ_k est convergente, et que la suite u^∞ converge vers la limite de la suite $(\ell_k)_{k\geqslant 0}$. Pour cela, on commence par montrer que (ℓ_k) est de Cauchy.
Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $k, k' \geqslant n_0(\varepsilon)$,
$$\forall n \in \mathbf{N},\ |u_n^k - u_n^{k'}| \leqslant \|u^k - u^{k'}\|_\infty \leqslant \varepsilon$$
d'où, en laissant tendre n vers l'infini :
$$|\ell_k - \ell_{k'}| \leqslant \varepsilon.$$
La suite $(\ell_k)_{k\geqslant 0}$ est donc de Cauchy dans $\mathbf{R}$ qui est complet, donc elle converge vers un certain réel ℓ. Montrons que $(u_n^\infty)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ.
Soit $\varepsilon > 0$. Soit $k \in \mathbf{N}$ suffisamment grand pour avoir à la fois $\|u^k - u^\infty\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ et $|\ell_k - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a par l'inégalité triangulaire
$$\begin{aligned} |u_n^\infty - \ell| &\leqslant |u_n^\infty - u_n^k| + |u_n^k - \ell_k| + |\ell_k - \ell| \\ &\leqslant \|u^\infty - u_k\|_\infty + |u_n^k - \ell_k| + |\ell_k - \ell| \\ &\leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + |u_n^k - \ell_k| \end{aligned}$$
Puis comme $(u_n^k)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ_k, il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$, $|u_n^k - \ell_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Donc pour tout $n \geqslant N$, $|u_n^\infty - \ell| \leqslant \varepsilon$, ce qui conclut la preuve.

Remarques : (1) On a démontré au passage une version du théorème de la double limite :
$$\lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} u_n^k = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} u_n^k$$
le point important étant la convergence *uniforme* de u^k vers u^∞.
(2) Une rédaction alternative de cet exercice est possible : on pourrait utiliser le fait que X est contenu dans $\ell^\infty(\mathbf{N}, \mathbf{R})$, qui est complet pour la norme uniforme, et donc d'après l'exercice 6, X est complet si et seulement si il est fermé dans $\ell^\infty(\mathbf{N}, \mathbf{R})$. Cela nous permet de sauter les deux premières étapes de la preuve précédente, et de passer directement à la dernière qui consiste à montrer qu'une limite uniforme de suites convergentes est encore convergente.