



---

COUPLAGES LEÇONS-DÉVELOPPEMENTS  
AGRÉGATION EXTERNE DE  
MATHÉMATIQUES

---

Année 2018-2019

Thomas CAVALLAZZI

# 1 Couplages

## 1.1 Leçons d'Algèbre et de Géométrie

- **101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.**
  - Réciprocité quadratique
  - Théorème de la base de Burnside
  - *Nombre de matrices diagonalisables sur les corps finis*
  - *Table des caractères de  $S_4$*
  - *Sous-groupes compacts de  $GL_n(\mathbb{R})$*
  
- **102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.**
  - Irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur  $\mathbb{Z}$
  - Polygones réguliers constructibles
  - *Théorème de structure de groupes abéliens finis*
  
- **103 : Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.**
  - Théorème de la base de Burnside
  - Sous-groupes distingués et noyaux des caractères
  - *Frobenius Zolotarev*
  - *Simplicité de  $SO_3(\mathbb{R})$*
  
- **104 : Groupes finis. Exemples et applications.**
  - Théorème de la base de Burnside
  - Théorème de structure des groupes abéliens finis
  - *Réciprocité quadratique*
  - *Nombre de matrices diagonalisables sur les corps finis*
  - *Table des caractères de  $S_4$*
  
- **105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications**
  - Frobenius Zolotarev
  - Table des caractères de  $S_4$
  
- **106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie  $E$ , sous-groupes de  $GL(E)$ . Applications.**
  - Frobenius Zolotarev
  - Sous-groupes compacts de  $GL_n(\mathbb{R})$

- *Simplicité de  $SO_3(\mathbb{R})$*
- **107 : Représentations et caractères d'un groupe fini sur un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. Exemples.**
  - Théorème de structure des groupes abéliens finis
  - Sous-groupes distingués et noyaux de caractères
  - *Tables des caractères de  $S_4$*
- **108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.**
  - Théorème de la base de Burnside
  - SimPLICITÉ de  $SO_3(\mathbb{R})$
  - *Quaternions et rotations*
- **110 : Structure et dualité des groupes abéliens finis. Applications.**
  - Théorème de structure des groupes abéliens finis
  - Formule de Poisson discrète
- **120 : Anneaux  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Applications.**
  - Théorème de structure des groupes abéliens finis
  - Théorème de Sophie Germain
  - *Réciprocité quadratique*
- **121 : Nombres premiers. Applications.**
  - Réciprocité quadratique
  - Polygones réguliers constructibles
  - *Théorème des deux carrés*
  - *Théorème de Sophie Germain*
- **122 : Anneaux principaux. Applications.**
  - Théorème des deux carrés
  - Autour des endomorphismes semi-simples
  - *Réduction de Frobenius*
- **123 : Corps finis. Applications.**
  - Réciprocité quadratique
  - Nombre de polynômes irréductibles sur les corps finis
  - *Frobenius Zolotarev*

- *Algorithme de Berlekamp*
- **125 : Extensions de corps. Exemples et applications.**
  - Polygones réguliers constructibles
  - Nombre de polynômes irréductibles sur les corps finis
- **126 : Exemples d'équations en arithmétique.**
  - Théorème des deux carrés
  - Réciprocité quadratique
  - *Théorème de Sophie Germain*
- **141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.**
  - Irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur  $\mathbb{Z}$
  - Nombre de polynômes irréductibles sur les corps finis
  - *Autour des endomorphismes semi-simples*
  - *Algorithme de Berlekamp*
- **142 : PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications**
  - Théorème de Sophie Germain
  - Algorithme de Berlekamp
- **144 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.**
  - Structure de polyômes symétriques
  - Irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur  $\mathbb{Z}$
- **150 : Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.**
  - Sous-groupes compacts de  $GL_n(\mathbb{R})$
  - Nombre de matrices diagonalisables sur les corps finis
  - *Réduction de Frobenius*
  - *Réciprocité quadratique*
- **151 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.**
  - Polygones réguliers constructibles
  - Théorème de la base de Burnside
  - *Réduction de Frobenius*

- *Coniques passant par 5 points*
- *Algorithme de Berlekamp*
  
- **152 : Déterminant. Exemples et applications.**
  - Frobenius Zolotarev
  - Coniques passant par 5 points
  
- **153 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.**
  - Image de l'exponentielle
  - Décomposition de Dunford effective
  - *Réduction de Frobenius*
  - *Autour des endomorphismes semi-simples*
  
- **154 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.**
  - Réduction de Frobenius
  - Autour des endomorphismes semi-simples
  
- **155 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.**
  - Décomposition de Dunford effective
  - Nombre de matrices diagonalisables sur les corps finis
  - *Autour des endomorphismes semi-simples*
  
- **156 : Exponentielle de matrices. Applications.**
  - Image de l'exponentielle
  - Homéomorphisme de  $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$
  
- **157 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.**
  - Décomposition de Dunford effective
  - Convergence des méthodes itératives
  
- **158 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.**
  - Homéomorphisme de  $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$
  - Lemme de Morse
  
- **159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.**

- Réduction de Frobenius
- Théorème des extrema liés
- **160 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).**
  - Simplicité de  $SO_3(\mathbb{R})$
  - Homéomorphisme de  $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$
  - *Sous-groupes compacts de  $GL_n(\mathbb{R})$*
  - *Table des caractères de  $S_4$*
- **161 : Distances et isométries d'un espace affine euclidien.**
  - Simplicité de  $SO_3(\mathbb{R})$
  - Table des caractères de  $S_4$
  - *Quaternions et rotations*
- **162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.**
  - Méthode du gradient à pas optimal
  - Coniques passant par 5 points
  - *Méthodes itératives pour les systèmes linéaires*
- **170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.**
  - Réciprocité quadratique
  - Lemme de Morse
- **171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.**
  - Lemme de Morse
  - Coniques passant par 5 points
- **181 : Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.**
  - Sous-groupes compacts de  $GL_n(\mathbb{R})$
  - Coniques passant par 5 points
- **182 : Applications des nombres complexes à la géométrie.**
  - Polygones réguliers constructibles
  - Quaternions et rotation

- **183 : Utilisation des groupes en géométrie.**
  - Quaternions et rotations
  - Polygones réguliers constructibles
  
- **190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.**
  - Nombre de polynômes irréductibles sur les corps finis
  - Réciprocité quadratique
  - *Nombre de matrices diagonalisables sur les corps finis*

## 1.2 Leçons d'Analyse

- **201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.**
  - Représentation des fonctions lipschitziennes
  - Densité des fonctions continues nulle part dérivables
  - *Equation de Schrödinger sur  $\mathbb{R}$*
  
- **202 : Exemples de parties denses et applications.**
  - Équirépartition presque sûre des orbites du doublement de l'angle
  - Théorème de Féjèr
  - *Densité des fonctions continues nulle part dérivables*
  
- **203 : Utilisation de la notion de compacité.**
  - Théorème de Hadamard-Lévy
  - Optimisation dans un Hilbert
  - *Théorèmes de Prokhorov et de Lévy*
  - *Homéomorphisme de  $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$*
  
- **204 : Connexité. Exemples et applications.**
  - Image de l'exponentielle
  - Théorème de Hadamard-Lévy
  - *Simplicité de  $SO_3(\mathbb{R})$*
  
- **205 : Espaces complets. Exemples et applications.**
  - Optimisation dans un Hilbert
  - Densité des fonctions continues nulle part dérivables
  - *Lax-Milgram et application*
  
- **207 : Prolongement de fonctions. Exemples et applications.**
  - Représentation des fonctions lipschitziennes
  - Prolongement de la fonction Zêta
  - *Optimisation dans un Hilbert*
  
- **208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.**
  - Représentation des fonctions lipschitziennes
  - Optimisation dans un Hilbert
  - *Lax-Milgram et application*

- **209 : Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications**
  - Théorème de Féjèr
  - Théorème taubérien fort
  
- **213 : Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.**
  - Optimisation dans un Hilbert
  - Lax-Milgram et application
  
- **214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.**
  - Théorème de Hadamard-Lévy
  - Image de l'exponentielle
  - *Lemme de Morse*
  - *Théorème des extrema liés*
  
- **215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Exemples et applications.**
  - Théorème de Hadamard-Lévy
  - Théorème des extrema liés
  - *Lemme de Morse*
  - *Méthode du gradient à pas optimal*
  
- **219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.**
  - Optimisation dans un Hilbert
  - Théorème des extrema liés
  - *Méthode du gradient à pas optimal*
  
- **220 : Équations différentielles  $X' = f(t, X)$ . Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.**
  - Théorème de Hadamard-Lévy
  - Théorème de stabilité de Liapunov
  - *Nombre de zéros d'une EDO*
  
- **221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires.**
  - Nombre de zéros d'une EDO
  - Théorème de stabilité de Liapunov

- **222 : Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.**
  - Equation de la chaleur sur le cercle
  - Lax-Milgram et application
  - *Equation de Schrödinger*
  
- **223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.**
  - Équirépartition presque sûre des orbites du doublement de l'angle
  - Convergence presque sûre des sous-martingales bornées dans  $L^1$  ( oups j'aime les probas ... )
  
- **224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.**
  - Nombre de zéros d'une EDO
  - Quelques ordres moyens
  
- **226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.**
  - Équirépartition presque sûre des orbites du doublement de l'angle
  - Méthode du gradient à pas optimal
  - *Méthodes itératives pour les systèmes linéaires*
  
- **228 : Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples.**
  - Représentation des fonctions lipschitziennes
  - Densité des fonctions continues nulle part dérivables
  
- **229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.**
  - Optimisation dans un Hilbert
  - Théorèmes de Prokhorov et de Lévy
  - *Méthode du gradient à pas optimal*
  
- **230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.**
  - Théorème taubérien fort
  - Quelques ordres de moyens
  
- **233 : Analyse numérique matricielle : résolution approchée de systèmes linéaires, Recherche de vecteurs propres, exemples.**
  - Méthode du gradient à pas optimal

- Méthodes itératives pour les systèmes linéaires
- **234 : Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.**
  - Théorème de Féjèr
  - Représentation des fonctions lipschitziennes
  - *Inversion de Fourier*
- **235 : Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.**
  - Inversion de Fourier
  - Théorème taubérien fort
  - *Formule des compléments*
  - *Équation de la chaleur sur le cercle*
- **236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.**
  - Formule des compléments
  - Inversion de Fourier
- **239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.**
  - Inversion de Fourier
  - Prolongement de la fonction Zêta
  - *Équation de Schrödinger sur  $\mathbb{R}$*
- **241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.**
  - Equation de la chaleur sur le cercle
  - Théorème taubérien fort
  - *Théorème de Prokhorov et de Lévy*
- **243 : Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.**
  - Problème des moments
  - Théorème taubérien fort
- **245 : Fonctions holomorphes sur un ouvert de  $\mathbb{C}$ . Exemples et applications.**
  - Formule des compléments
  - Prolongement de la fonction Zêta

- **246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.**
  - Équation de la chaleur sur le cercle
  - Théorème de Féjèr
  
- **250 : Transformation de Fourier. Applications.**
  - Équation de Schrödinger sur  $\mathbb{R}$
  - Inversion de Fourier
  
- **253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.**
  - Optimisation dans un Hilbert
  - Méthode du gradient à pas optimal
  - *Sous-groupes compacts de  $GL_n(\mathbb{R})$*
  
- **260 : Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.**
  - Marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}^d$
  - Problème des moments
  
- **261 : Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.**
  - Problème des moments
  - Équirépartition presque sûre des orbites du doublement de l'angle
  
- **262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limites. Exemples et applications.**
  - Convergence presque sûre des sous-martingales bornées  $L^1$
  - Théorème de Prokhorov et de Lévy
  - *Marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}^d$*
  - *Équirépartition presque sûre des orbites du doublement de l'angle*
  
- **264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.**
  - Marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}^d$
  - Équirépartition presque sûre des orbites du doublement de l'angle
  
- **265 : Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.**
  - Formule des compléments
  - Prolongement de la fonction Zêta