Licence 3 de Mathématiques — ENS Rennes
EVNCD — 2021-2022

# Révisions : Calcul différentiel

**Exercice 1.** *Echauffement*

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^d$.

1. Soit $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^d)$. Montrer que $x \in \mathbf{R}^d \mapsto \|\phi(x)\|^2$ est différentiable et calculer sa différentielle.
2. Expliciter dans le cas où $\phi$ est linéaire.

**Exercice 2.** *Isométries infinitésimales d'un espace euclidien*

Soit $E$ un espace euclidien, i.e., un espace de Hilbert de dimension finie sur $\mathbf{R}$, non réduit à zéro. On note $\langle\cdot,\cdot\rangle$ son produit scalaire et $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ la norme associée. On considère une isométrie infinitésimale de $E$, i.e., une application (a priori non linéaire) $f : E \to E$ de classe $C^1$ sur $E$ vérifiant

$$\forall x \in E, \forall h \in E, \quad \langle df(x).h, df(x).h\rangle = \langle h, h\rangle$$

1. Montrer
$$\forall x \in E, \forall h_1, h_2 \in E, \quad \langle df(x).h_1, df(x).h_2\rangle = \langle h_1, h_2\rangle$$
2. Montrer que, pour tout $x \in E$, $df(x) : E \to E$ est un isomorphisme bicontinu
3. Déterminer la norme $\|df(x)\|_{\mathcal{L}_c(E)}$ pour tout $x \in E$
4. **(Cours)** Énoncer l'inégalité des accroissements finis pour une fonction d'une variable vectorielle à valeurs vectorielles
5. En déduire que
$$\forall x, y \in E, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$$
6. **(Cours)** Énoncer le théorème d'inversion locale
7. Montrer que, pour tout $x_0 \in E$, il existe un voisinage ouvert $U_{x_0}$ de $x_0$ dans $E$, et un voisinage ouvert $V_{x_0}$ de $f(x_0)$ dans $E$, tels que $f$ soit un $C^1$-difféomorphisme de $U_{x_0}$ sur $V_{x_0}$
8. **(Cours)** Énoncer le théorème de différentiation des fonctions composées pour des fonctions de variables vectorielles à valeurs vectorielles
9. Démontrer
$$\forall x \in U_{x_0}, \quad d(f^{-1})(f(x)) = (df(x))^{-1}$$
10. En déduire qu'il existe un voisinage ouvert $\widetilde{U}_{x_0}$ de $x_0$ dans $E$ tel que $\widetilde{U}_{x_0} \subset U_{x_0}$ et
$$\forall x, y \in \widetilde{U}_{x_0}, \quad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$
11. Montrer que l'application $x \in E \mapsto \|x\|^2 \in \mathbf{R}_+$ est $C^1$ sur $E$, et calculer sa différentielle
12. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ tel que $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$.
    (a) Justifier que $\omega = E \setminus F$ est un ouvert de $E$.

(b) On considère l'application $d(.,F) : \omega \to \mathbb{R}_+$, définie par $d(x,F) = \inf_{y\in F} \|x-y\|$. Montrer que cette application est $C^1$ sur $\omega$ et calculer sa différentielle.

13. On considère l'application $\phi : E \times E \to \mathbf{R}_+$ définie par $\phi(x,y) = \|f(x) - f(y)\|^2$ pour tous $x, y \in E$. Montrer que $\phi$ admet une différentielle partielle par rapport à $y$ et que

$$\forall x, y \in E, \forall h \in E, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y).h = -2\langle f(x) - f(y), df(y).h\rangle$$

14. Montrer que $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ admet une différentielle partielle par rapport à $x$ et calculer

$$\forall x, y \in E, \forall h_1, h_2 \in E, \quad \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y).h_1\Big).h_2$$

15. En utilisant la question 10, en déduire

$$\forall x, y \in \widetilde{U}_{x_0}, \forall h_1, h_2 \in E, \quad \langle df(x).h_1, df(y).h_2\rangle = \langle h_1, h_2\rangle$$

16. Calculer $\|df(x).h_1 - df(y).h_2\|^2$ pour tous $x, y \in \widetilde{U}_{x_0}$ et $h_1, h_2 \in E$. En déduire

$$\forall x, y \in \widetilde{U}_{x_0}, \quad df(x) = df(y)$$

17. Soient $x_0 \in E$ et $\Omega_{x_0} = \{x \in E : \ df(x) = df(x_0)\}$. Montrer que $\Omega_{x_0}$ est sous-ensemble fermé, ouvert et non vide de $E$
18. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{L}_c(E)$ vérifiant $\|A(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$, et $b \in E$ tels que

$$\forall x \in E, \quad f(x) = A(x) + b$$

19. En déduire que $f$ est un $C^\infty$-difféomorphisme de $E$ sur $E$
20. Donner des exemples (non triviaux) d'isométries infinitésimales de $\mathbf{R}^3$
21. Proposer des hypothèses supplémentaires pour que les conclusions de cet exercice restent valables dans le cas d'un espace de Hilbert de dimension infinie sur $\mathbf{R}$

**Exercice 3.** *Transformation d'une suite $l^p$*

Soient $p \geq 1$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ une fonction nulle en 0. On pose :

$$F : \left\{ \begin{array}{cl} l^p(\mathbf{N}, \mathbf{R}) & \to l^p(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \\ x = (x_n)_{n\geq 0} & \mapsto F(x) = (f(x_n))_{n\geq 0} \end{array} \right. .$$

1. Montrer que $F$ est bien définie.
2. Montrer que $F$ est différentiable et calculer sa différentielle.

**Exercice 4.** *Fonctions strictement monotones*

Soit $E$ un espace euclidien. Une application $f : E \to E$ est dite strictement monotone s'il existe $k > 0$ tel que

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x) - f(y), x - y\rangle \geq k\|x - y\|^2.$$

1. Soit $f : E \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $f$ est strictement monotone si et seulement si

$$\exists k > 0, \forall x \in E, \forall h \in E, \quad \langle df(x) \cdot h, h\rangle \geq k\|h\|^2.$$

2. Soit $f : E \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone. Montrer que $f$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global sur $E$.