Révisions : Espaces vectoriels normés, espaces métriques, applications linéaires continues

Exercice 1. *Complétude de l'espace des suites convergentes*
Montrer que l'ensemble des suites convergentes de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ muni de la norme uniforme définie par :

$$\forall u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}},\ \|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbf{N}} |u_n|,$$

est complet.

Exercice 2. *Un calcul de norme*
Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^2}$, $a \in]0,1[$ et $T : E \to \mathbf{R}$ définie par :

$$\forall f \in E,\ Tf = \int_0^a x^2 f(x)\,dx.$$

Montrer que T est bien définie, linéaire, continue et calculer sa norme subordonnée. La valeur de la norme de T est-elle atteinte ?

Exercice 3. *Dual de $c_0(\mathbf{N},\mathbf{R})$*
Montrer que le dual topologique de l'espace des suites qui tendent vers 0, noté $c_0(\mathbf{N},\mathbf{R})$ s'identifie à $l^1(\mathbf{N},\mathbf{R})$ par une isométrie linéaire bijective.

Exercice 4. *Compacité et contrôle des normes L^p*
Soient $M > 0$ et $p > 1$. Montrer que l'ensemble

$$L_{M,p} = \Big\{ f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbf{R}) : \int_a^b |f(t)|\,dt + \int_a^b |f'(t)|^p\,dt \le M \Big\},$$

est relativement compact dans $(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$.