

TD 10 : EXTREMA

Exercice 1. *Extrema libres 1*

Déterminer les extrema locaux, s'ils existent, de la fonction :

$$f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto x^3 + xy^2 - x^2y - y^3.$$

Exercice 2. *Extrema libres 2*

Déterminer les points critiques et leur nature de : $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto 2x^3 - 6xy + 2y^3$.

Exercice 3. *Extrema libres en fonction d'un paramètre*

Discuter, en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbf{R}$, la nature des extrema, de la fonction :

$$f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto y(x^2 + y^2 - 2\lambda y).$$

Exercice 4. *Extrema liés 1*

Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$. On considère la fonction

$$f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto e^{axy}.$$

Etudier les extrema relatifs de la fonction f sur l'ensemble

$$\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^3 + y^3 + x + y = 4\}.$$

Exercice 5. *Extrema liés 2*

On définit l'ensemble \mathcal{K} par :

$$\mathcal{K} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, 2x + 4y = 5 \text{ et } x^2 + z^2 = 2y\}.$$

Après avoir justifié leur existence, donner les points de \mathcal{K} à distance respectivement minimale et maximale de l'origine.

Exercice 6. *Plus grande valeur propre*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique. Montrer que :

$$\lambda := \max_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle,$$

est bien définie et est valeur propre de A .

Remarque : On en déduit facilement le théorème spectral.

Exercice 7. *Distance d'un hyperplan à la sphère*

Soient \mathbf{S}^{n-1} la sphère unité de $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ et $H = \{x \in \mathbf{R}^n, \langle x, v \rangle = a\}$, où $v \in \mathbf{R}^n$ et $a \geq 0$ sont fixés. Déterminer la distance D de l'hyperplan affine H à \mathbf{S}^{n-1} définie par :

$$D := \inf_{(x,y) \in \mathbf{S}^{n-1} \times H} |x - y|.$$

Exercice 8. *Inégalité arithmético géométrique*

1. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des nombres réels strictement positifs tels que $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$. On considère

$$K = \left\{ x \in (\mathbf{R}_+^*)^n, \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j = 1 \right\},$$

et pour tout $x \in K$, on pose $f(x) = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$. Calculer le maximum de f sur K et en déduire l'inégalité suivante :

$$\forall x \in (\mathbf{R}_+)^n, \quad \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j} \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j.$$

Caractériser le cas d'égalité.

2. Parmi tous les parallélépipèdes rectangles de volume V donné, montrer qu'il en existe un unique dont la surface est minimale : lequel est-ce ?

Exercice 9. *Problème isopérimétrique pour les triangles*

Déterminer le triangle ayant une aire maximale parmi les triangles dont le périmètre est fixé.

Indication : On pourra utiliser librement la formule de Héron qui affirme que l'aire d'un triangle dont les côtés ont pour longueurs a , b , et c est égale à :

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

où p est le demi-périmètre du triangle.

Exercice 10. *Inégalité de Hadamard*

Démontrer l'inégalité suivante :

$$\forall v_1, \dots, v_n \in \mathbf{R}^n, \quad |\det(v_1, \dots, v_n)| \leq \prod_{j=1}^n \|v_j\|,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne, et caractériser les cas d'égalité.

Exercice 11. *Extrema libres et liés*

Soit

$$f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$

1. Étudier les extrema locaux de f .
2. Étudier les extrema globaux de f sur l'ensemble :

$$\mathcal{K} := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x^4 + y^4 = 1\}.$$