Licence 3 de Mathématiques
EVNCD

ENS Rennes
2021-2022

TD 12 : Compléments sur les espaces de Hilbert et topologie faible

Exercice 1. *Opérateurs diagonaux*

Soient $(\lambda_n)_n$ une suite bornée de réels et H un espace de Hilbert séparable dont on note $(e_n)_n$ une base hilbertienne.

1. Montrer qu'il existe un unique $T \in \mathcal{L}_c(H)$ tel que pour tout n :
$$Te_n = \lambda_n e_n.$$
2. Calculer sa norme d'opérateur.
3. Donner une CNS pour que T admette un inverse continu et calculer sa norme d'opérateur.

Exercice 2. *Polynôme orthogonaux : existence et unicité*

Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $\rho : I \to \mathbf{R}$ une fonction poids, i.e. ρ est mesurable, strictement positive et vérifie :
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \int_I |x|^n \rho(x)\, dx < +\infty.$$
On note $L^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure à densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue.

1. Montrer qu'il existe une unique suite $(P_n)_{n\geq 0}$ de polynômes unitaires, deux à deux orthogonaux et tels que $\deg P_n = n$.
2. Expliciter P_1, P_2 et P_3 pour $I = \mathbf{R}$ et pour $\rho(x) = e^{-x^2}$.
3. Montrer que pour tout n, les zéros de P_n sont réels, distincts, et tous dans l'intervalle I.

Exercice 3. *Densité des polynômes orthogonaux*

Remarque : Nécessite le théorème d'holomorphie sous l'intégrale, le principe des zéros isolés (cf HOLO) et les bases sur la transformée de Fourier.

Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et ρ une fonction poids. On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que
$$\int_I e^{a|x|} \rho(x) \, \mathrm{d}x < +\infty.$$
On cherche à montrer que l'ensemble des polynômes orthogonaux associés à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.

1. Soit $f \in L^2(I, \rho)$. Montrer que la fonction φ définie par
$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x)\rho(x) & \text{si } x \in I, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$
est une fonction de $L^1(\mathbf{R})$. Montrer que sa transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ se prolonge en une fonction holomorphe F sur
$$B_a = \big\{ z \in \mathbf{C} : |\mathrm{Im}(z)| < a/2 \big\}.$$

2. On suppose que $f \in L^2(I,\rho)$ est orthogonale aux monômes. En utilisant φ, montrer que f est nulle et conclure.

Exercice 4. *Base de Haar*

On définit les fonctions de Haar $(H_n)_{\geq 0}$ définies sur $[0,1]$ en posant $H_0 = 1$ et pour $n \in \mathbf{N}$ et $k \in \{1, \ldots, 2^n\}$:

$$H_{2^n+k-1} = \begin{cases} \sqrt{2^n} & \text{si } x \in](2k-2)2^{-n-1}, (2k-1)2^{-n-1}[\\ -\sqrt{2^n} & \text{si } x \in](2k-1)2^{-n-1}, (2k)2^{-n-1}[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que $(H_n)_n$ est orthonormée dans $L^2(0,1)$.
2. Montrer qu'il s'agit d'une base hilbertienne de $L^2(0,1)$.

Indication : On pourra considérer $f \in \{H_n,\, n \geq 0\}^\perp$ et montrer que $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est nulle.

Remarque culturelle : On peut utiliser cette base hilbertienne pour construire le fameux mouvement brownien !

Exercice 5. *Adjoint d'un opérateur à noyau*

Soient $H = L^2([0,1];\mathbf{C})$ muni de $\langle \cdot,\cdot \rangle_{L^2}$ et $K \in L^2([0,1]^2;\mathbf{C})$. On définit l'opérateur à noyau K par :

$$\forall f \in H,\, \forall t \in [0,1], \quad T_K f(t) = \int_0^1 K(t,s) f(s)\,ds.$$

Montrer que T est bien défini comme endomorphisme continu de H et calculer son adjoint.

Exercice 6. *Théorème de Lax-Milgram*

Soit H un espace de Hilbert. On considère une forme bilinéaire continue a sur H que l'on suppose coercive, i.e. il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :

$$\forall x \in H, \quad a(x,x) \geq \alpha \|x\|^2.$$

On va montrer que pour toute forme linéaire continue $L \in H'$, il existe un unique $u \in H$ tel que :

$$\forall v \in H, \quad a(u,v) = L(v).$$

1. Montrer que si u existe, il est nécessairement unique.
2. Montrer qu'il existe une application linéaire et continue $T : H \to H$ telle que, pour tous $u, v \in H$:
$$a(u,v) = \langle Tu, v \rangle.$$
3. Montrer que :
$$\forall u \in H, \quad \|Tu\| \geq \alpha \|u\|.$$
4. Montrer que l'image de T est fermée dans H.
5. Montrer que T est surjective et conclure.
6. Montrer que si a est symétrique alors u est caractérisé par :
$$\frac{1}{2}a(u,u) - L(u) = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - L(v) \right\}.$$

Exercice 7. *Opérateurs de Hilbert-Schmidt*

Soit H un espace de Hilbert séparable. On dit que $T \in \mathcal{L}_c(H)$ est de Hilbert-Schmidt s'il existe une base Hilbertienne $(e_n)_n$ de H telle que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|^2 < +\infty.$$

On note $\mathcal{HS}$ leur ensemble.

1. Montrer que si T est de Hilbert-Schmidt pour la base hilbertienne $(e_n)_n$ alors si $(f_n)_n$ est une autre base hilbertienne de H, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|T^* f_n\|^2.$$

   En déduire que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|T f_n\|^2,$$

   valeur qu'on notera $\|T\|_{HS}^2$.
2. Vérifier que $\| \cdot \|_{HS}$ est une norme issue d'un produit scalaire sur $\mathcal{HS}$ qui fait de $(\mathcal{HS}, \| \cdot \|_{HS})$ un espace de Hilbert.
3. Montrer que si T est de Hilbert-Schmidt, et si $(x_n)_n$ converge faiblement vers x, alors $Tx_n \to Tx$ au sens fort.

Exercice 8. *Convergence faible dans un Hilbert*

Soit H un espace de Hilbert. On dit qu'une suite $(x_n)_n \in H^{\mathbf{N}}$ converge faiblement vers $x \in H$ si :

$$\forall y \in H, \, \langle x_n, y \rangle \to \langle x, y \rangle,$$

ce qu'on note $x_n \rightharpoonup x$.

1. Montrer l'unicité de la limite faible d'une suite, si elle existe.
2. Montrer que $x_n \to x$ au sens fort de la norme sur H est équivalent à $x_n \rightharpoonup x$ et $\|x_n\| \to \|x\|$.
3. Montrer qu'une suite faiblement convergente est bornée.
4. Si $T \in \mathcal{L}_c(H)$ et que $x_n \rightharpoonup x$, montrer que $T_x \rightharpoonup Tx$.
5. Montrer que si $x_n \rightharpoonup x$ au sens faible et si $y_n \to y$ au sens fort, alors $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$.

Exercice 9. *Théorème de Banach-Alaoglu (compacité faible)*

Soient H un espace de Hilbert et $(x_n)_n \in H^{\mathbf{N}}$ une suite bornée. Montrer qu'on peut extraire une sous-suite de $(x_n)_n$ qui converge faiblement dans H.

Indication : On pourra commencer par traiter le cas où H est séparable.

Exercice 10. *Lemme de Mazur*

Soit H un espace de Hilbert. Montrer que toute suite $(x_n)_n \in H^{\mathbf{N}}$ qui converge faiblement est limite forte d'une suite de combinaisons convexes des vecteurs x_n.

Exercice 11. *Moyenne sur une base hilbertienne*

Soit H un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_n$ une base hilbertienne. Soit $(a_n)_n$ une suite de réels bornée. Pour $n \geq 1$, on pose

$$u_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k e_k.$$

Montrer que $(u_n)_n$ converge fortement vers 0 dans H et que $(\sqrt{n} u_n)_n$ converge faiblement vers 0 dans H.

Exercice 12. *Optimisation sur un espace de Hilbert*

Soit H un espace de Hilbert. Soit $J : H \to \mathbf{R}$ une fonction continue, convexe et coercive dans le sens où :

$$J(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\to} +\infty.$$

1. Montrer que si $(x_n)_n \in H^{\mathbf{N}}$ est une suite bornée, alors il existe une sous-suite qui converge faiblement. On pourra commencer par traiter le cas où H est séparable.
2. Montrer que J atteint son minimum sur H.