TD 7 : Séries de Fourier

Exercice 1. *Pour se faire la main*

Calculer les coefficients de Fourier des fonctions 2π-périodiques définies ci-dessous et dire, en justifiant, si elles sont sommes de leur série de Fourier :

1. $x \in [-\pi, \pi] \mapsto \mathbf{1}_{[0,\pi)}(x) - \mathbf{1}_{(-\pi,0)}(x)$
2. $x \in [0, 2\pi[\mapsto x$
3. $x \in [-\pi, \pi] \mapsto |x|$.

Exercice 2. *Valeurs de la fonction Zêta de Riemann*

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction 2π-périodique telle que :

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}.$$

Calculer les coefficients de Fourier de f et en déduire les valeurs de :

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \text{et} \quad \zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 3. *Développement de la cotangente*

Soit $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$. On considère $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction 2π-périodique telle que :

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = \cos(\alpha x).$$

1. Développer f en série de Fourier.
2. En déduire que :

$$\pi \mathrm{cotan}(\pi\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}.$$

Remarque : La théorie des fonctions holomorphes permet d'étendre cette identité à $\mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}$ par principe des zéros isolés.

Exercice 4. *Coefficients de Fourier d'une fonction höldérienne*

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction 2π-périodique α-hölderienne. Montrer qu'il existe $C \geq 0$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbf{Z}^*, \quad |c_n(f)| \leq \frac{C}{|n|^\alpha}.$$

Indication : On pourra exprimer

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t+a) e^{-int} \, dt,$$

en fonction de $c_n(f)$, où $a \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{Z}$.

Exercice 5. *Théorème de Fejér L^p*

Soit $f \in L^p(0, 2\pi)$ avec $p \in [1, +\infty)$. On note $(K_n)_n$ le noyau de Fejér et $*$ le produit de convolution. Montrer que :

1. $K_n * f \in L^p(0, 2\pi)$.
2. $K_n * f \overset{L^p}{\to} f$, c'est-à-dire que la moyenne de Cesàro des sommes partielles de la série de Fourier de f converge vers f dans L^p.
3. En déduire l'injectivité de la transformée de Fourier sur $L^1(0, 2\pi)$.

Indication : On rappelle que pour $n \geq 1$: $K_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2$ prolongé par continuité sur $2\pi\mathbf{Z}$.

Exercice 6. *Coefficients de Fourier positifs*

Soit f une fonction continue 2π-périodique dont les coefficients de Fourier $c = (c_n(f))_{n\in\mathbf{Z}}$ sont tous positifs. Montrer que $c \in l^1(\mathbf{Z})$.

Indication : On pourra étudier la suite $(K_n * f(0))_n$, où $(K_n)_n$ est le noyau de Fejér et où $*$ est le produit de convolution.

Exercice 7. *Équation de la chaleur*

Soit $u_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π-périodique. Montrer qu'il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^0([0, +\infty) \times \mathbf{R}; \mathbf{C}) \cap \mathcal{C}^\infty((0, +\infty) \times \mathbf{R}; \mathbf{C})$, où $u(t, \cdot)$ est une fonction 2π-périodique pour tout $t \geq 0$, solution de :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x) & \forall (t,x) \in (0, +\infty) \times \mathbf{R}, \\ u(0,x) = u_0(x) & \forall x \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

<u>Remarque :</u> On peut résoudre l'équation de la chaleur pour des données initiales moins régulières que $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Exercice 8. *Phénomène de Gibbs*

On considère une fonction φ constante par morceaux, 2π-périodique, impaire, égale à 1 sur $(0, \pi)$, et égale à 0 sur $\pi\mathbf{Z}$.

1. Calculer la série de Fourier de φ. Montrer qu'elle converge simplement sur $\mathbf{R}$ vers φ.
2. Montrer que les sommes partielles d'indice impairs S_{2n-1} de la série de Fourier de φ admettent la représentation intégrale :

$$\forall t \in [0, \pi], \quad S_{2n-1}(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^t \frac{\sin(2ns)}{\sin(s)}\, ds.$$

3. Calculer les points critiques de S_{2n-1} sur $[0, \pi]$ et montrer que S_{2n-1} admet en le plus petit d'entre eux un maximum local.
4. Montrer que ce maximum converge vers

$$M := \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(s)}{s}\, ds > 1.$$

5. Commenter.