TD 6 : Topologie dans les espaces métriques

Exercice 1. *Distance de Hausdorff*

Soit (X, d) un espace métrique. On note $\mathrm{Com}(X)$ l'ensemble des compacts non vides de (X, d).

1. Montrer que pour $\mathcal{K} \in \mathrm{Com}(X)$, l'application distance à $\mathcal{K}$:
$$x \in X \mapsto d(x, \mathcal{K}) := \inf_{y \in \mathcal{K}} d(x, y),$$
est 1-lipschitzienne.
2. Pour $A, B \in \mathrm{Com}(X)$, on pose :
$$d(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B).$$
Montrer que le sup est atteint et que $d(A, B) \neq d(B, A)$.
3. Pour $A, B \in \mathrm{Com}(X)$, on pose :
$$\delta(A, B) = \max \{d(A, B), d(B, A)\}.$$
Montrer qu'il s'agit d'une distance sur $\mathrm{Com}(X)$, on l'appelle distance de Hausdorff.

Remarque culturelle : Si X est complet alors $(\mathrm{Com(X)}, \delta)$ est aussi complet. Cela permet de construire, entre autres, l'ensemble de Cantor comme unique point fixe d'une application (laquelle ?) contractante sur $\mathrm{Com}([0, 1])$.

Exercice 2. *Contre-exemple au théorème de prolongement*

1. Rappeler le théorème de prolongement des applications uniformément continues.
2. Donner un contre-exemple dans le cas où l'application est seulement continue.
3. Donner un contre-exemple dans le cas où l'espace d'arrivée n'est pas complet.

Exercice 3. *Prolongement des fonctions hölderiennes*

Soient $\alpha \in (0, 1)$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions α-hölderiennes définies sur Ω à valeurs réelles. Montrer que $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) = \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, i.e. que les fonctions α-hölderiennes sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ sont les restrictions à Ω des fonctions α-hölderiennes sur l'adhérence de Ω.

Exercice 4. *Dérivée faible d'une fonction lipschtzienne*

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction L-lipschitzienne. On note :
$$T : \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \mapsto -\int_{\mathbf{R}} f(x)\phi'(x)\, dx,$$
la dérivée de f au sens des distributions.

1. Montrer que pour $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R};\mathbf{R})$, on a :

$$T(\phi) = \lim_{h\to 0^+} \int_{\mathbf{R}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\phi(x)\,dx.$$

2. En déduire que T admet un unique prolongement en une forme linéaire continue sur $L^1(\mathbf{R})$. Donner une majoration de sa norme d'opérateur.

Exercice 5. *Contre-exemples au théorème du point fixe*

Trouver des espaces métriques (E,d) et des applications f qui satisfont :

1. f est contractante de E dans lui-même mais n'admet pas de point fixe car E n'est pas complet.
2. E est complet, f est contractante mais n'admet pas de point fixe car n'envoie pas E dans lui-même.
3. E est complet, f envoie cet espace dans lui-même mais est sans point fixe malgré que :

$$\forall (x,y)\in E^2,\ x\neq y \Rightarrow \quad d(f(x),f(y)) < d(x,y).$$

4. E est complet, f envoie E dans E et admet plusieurs points fixes.

Exercice 6. *Théorème du point fixe et compacité*

Soient (X,d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ une fonction qui satisfait :

$$\forall x,y\in X, \quad x\neq y \Rightarrow d(f(x),f(y)) < d(x,y).$$

Montrer que f admet un unique point fixe $a\in X$ et que pour tout $x_0\in X$, la suite des itérées de x_0 par f converge vers a.

Exercice 7. *Théorème du point fixe avec une itérée contractante*

Soit (X,d) un espace métrique complet et soit $f : X\to X$ une application telle qu'il existe $N\geq 1$ tel que f^N (l'itérée N-ème de f) soit contractante.

1. Montrer que f admet un unique point fixe $a\in X$.
2. Montrer que pour tout $x_0\in X$, la suite des itérées par f partant de x_0 définie par : $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n\in\mathbf{N}$, converge vers a.

Exercice 8. *Équation intégrale non-linéaire de Volterra*

Soient $T>0$ et $K\in\mathcal{C}^0([0,T]\times[0,T]\times\mathbf{R},\mathbf{R})$. On suppose qu'il existe $L>0$ telle que :

$$\forall x,t\in[0,T],\ \forall u,u'\in\mathbf{R},\ |K(x,t,u)-K(x,t,u')| \leq L|u-u'|.$$

Montrer que pour toute $\phi\in\mathcal{C}^0([0,T],\mathbf{R})$, il existe une unique $f\in\mathcal{C}^0([0,T],\mathbf{R})$ solution de :

$$f(x) = \phi(x) + \int_0^x K(x,t,f(t))\,dt, \quad \forall x\in[0,T].$$

Indication : On pourra éventuellement utiliser l'exercice précédent.

Exercice 9. *Résolution d'une équation non-linéaire*

Montrer que l'équation fonctionnelle :

$$\forall t\in\mathbf{R},\ f(t+\sqrt{2})^2 + f(t-\sqrt{2})^2 + 100f(t) = \sin(2\pi t),$$

admet une solution f continue sur $\mathbf{R}$ et 1-périodique.

Exercice 10. *Approximation de zéros d'une fonction*

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. On souhaite approcher les zéros de f en se ramenant à un problème de point fixe. Pour cela, on pose la fonction $F = \mathrm{Id} - f$ et on utilise une suite récurrente du type :

$$x_{n+1} = F(x_n).$$

1. On souhaite résoudre : $x - \ln(1+x) - 0,2 = 0$ sur $\mathbf{R}_*^+$ à l'aide de la suite :

$$\begin{cases} x_{n+1} & = \ln(1+x_n) + 0,2 \\ x_0 & > 0. \end{cases}$$

   Montrer qu'il y a convergence globale, i.e. il y a convergence pour tout $x_0 > 0$, et que la convergence est géométrique.

2. On souhaite approcher les racines du polynôme $X^3 - 4X + 1$ à l'aide de :

$$\begin{cases} x_{n+1} & = \frac{1}{4}(x_n^3 + 1) \\ x_0 & \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

   Montrer que cette méthode ne permet d'approcher qu'une racine et que la convergence est locale, i.e. x_0 doit être proche de cette racine.

Exercice 11. *Equicontinuité ponctuelle vs équicontinuité uniforme*

Soient (E, d_E) un espace métrique compact, (F, d_F) un espace métrique et A une partie de $\mathcal{C}^0(E, F)$. Montrer l'équivalence entre :

1. A est ponctuellement équicontinue sur E, i.e. :

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in E, \quad d_E(x,y) < \eta \Rightarrow \forall f \in A, \quad d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

2. A est uniformément équicontinue sur E, i.e. :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in E, \quad d_E(x,y) < \eta \Rightarrow \forall f \in A, \quad d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Exercice 12. *Contre-exemple au théorème d'Ascoli : perte de masse à l'infini*

Soit $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ non nulle. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R}, \quad f_n(x) = f(x+n),$$

est équicontinue et bornée dans $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ mais qu'elle n'admet aucune sous-suite qui converge uniformément sur $\mathbf{R}$. Quelle hypothèse du théorème d'Ascoli est mise en défaut ici ?

Exercice 13. *Boule unité des fonctions höldériennes : une injection compacte*

Soit $\alpha \in (0,1]$. On note Lip_α l'espace des fonctions α-hölderiennes sur $[0,1]$ à valeurs réelles. On munit cet espace de la norme :

$$N_\alpha(f) = \|f\|_\infty + \sup_{0 \le x < y \le 1} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha},$$

qui le rend complet (cf TD 1).

Montrer que la boule unité fermée de $(\mathrm{Lip}_\alpha, N_\alpha)$ est une partie compacte de $(\mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 14. *Convergence d'une suite de fonctions lipschitziennes*

Soit $L > 0$. On considère une suite de fonctions $(f_n)_n$, où pour tout n, $f_n : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ est une fonction L-lipschitzienne. On suppose que :

$$\sup_{n\geq 0} \|f_n(0)\| < +\infty.$$

1. Montrer qu'on peut extraire une sous-suite de $(f_n)_n$ qui converge uniformément sur tout compact de $\mathbf{R}^d$.
2. Que peut-on dire si de plus $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f ?

Exercice 15. *Transformée de Fourier de mesures de probabilités*

Soit $(\mu_n)_n$ une suite de mesures de probabilités sur $(\mathbf{R}^d, \mathcal{B}(\mathbf{R}^d))$ (mesures positives de masse 1). On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_\varepsilon \subset \mathbf{R}^d$ tel que pour tout $n \geq 0$

$$\mu_n(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon.$$

La transformée de Fourier de μ_n est définie par

$$\xi \in \mathbf{R}^d \mapsto \hat{\mu}_n(\xi) := \int_{\mathbf{R}^d} e^{i\langle \xi, x\rangle}\, d\mu_n(x).$$

Montrer qu'il existe une sous-suite de $(\hat{\mu}_n)_n$ qui converge uniformément sur tout compact de $\mathbf{R}^d$.

Remarque culturelle : La condition sur la suite $(\mu_n)_n$ (appelée tension) est en fait un critère (CNS) de relative compacité sur l'espace des mesures de probabilités sur $\mathbf{R}^d$ (pour la topologie de la convergence en loi c.f. FPR)

Exercice 16. *Opérateurs compacts à noyaux*

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques compacts et μ une mesure borélienne de masse finie sur Y. Étant donnée une fonction $K \in \mathcal{C}^0(X \times Y; \mathbf{R})$, on définit un opérateur linéaire $T : (\mathcal{C}^0(Y; \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathcal{C}^0(X; \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ par :

$$\forall f \in \mathcal{C}(Y; \mathbf{R}),\, \forall x \in X, \quad Tf(x) = \int_Y K(x, y) f(y)\, d\mu(y).$$

Montrer que T est compact, i.e. que l'image par T de la boule unité de $\mathcal{C}^0(Y; \mathbf{R})$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}^0(X; \mathbf{R})$.

Exercice 17. *Opérateur primitive*

On note $H = L^2(0, 1)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^2}$. On définit l'opérateur primitive par $T : H \to H$ par :

$$\forall f \in H,\, \forall t \in [0, 1], \quad Tf(t) = \int_0^t f(s)\, ds.$$

1. Montrer que T définit un opérateur linéaire continu sur H et que $T(H) \subset \mathcal{C}^0([0, 1])$.
2. Montrer que T est compact, i.e. que l'image par T de la boule unité fermée de H est relativement compacte dans H.

Indication : On pourra montrer d'abord que l'image de la boule unité fermée de H est relativement compacte dans $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$.