Prépa agreg
Compléments d'analyse

ENS Rennes
2021-2022

TD : Espaces de Hilbert

Exercice 1. *Projection sur la boule unité fermée*

On considère $\mathbf{R}^n$ muni de sa structure euclidienne usuelle et on note B la boule unité fermée. Donner l'expression du projecteur orthogonal sur B.

Exercice 2. *Un calcul de distance*

Calculer :

$$I = \inf_{a,b,c\in\mathbf{R}} \int_0^{+\infty} (x^3 + ax^2 + bx + c)^2 e^{-x}\, dx.$$

Exercice 3. *Optimisation d'une fonction convexe*

Soient H un espace de Hilbert et $J : H \to \mathbf{R}$ une fonction continue, convexe et minorée. Considérons une suite minimisante $(x_n)_n$ telle que :

$$J(x_n) \to \inf_H J = I \in \mathbf{R}.$$

On suppose que $(x_n)_n$ converge faiblement (à extraction près), i.e il existe $x \in H$ tel que :

$$\forall y \in H,\ \langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle.$$

Montrer que $J(x) = I$.

Remarque : Si on suppose J continue convexe coercive au sens où

$$J(x) \underset{\|x\|\to+\infty}{\to} +\infty,$$

alors on peut montrer que la suite minimisante est bornée et conclure avec le théorème de Banach-Alaoglu (cf complément de topologie faible) que J atteint son infimum. C'est un joli développement !

Exercice 4. *Le théorème du supplémentaire orthogonal est-il vérifié ?*

On note $c_c(\mathbf{N};\mathbf{C})$ l'espace des suites de $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ nulles à partir d'un certain rang muni du produit scalaire usuel :

$$\forall u, v \in c_c(\mathbf{N};\mathbf{C}),\ \langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \overline{v_n}.$$

On définit la forme linéaire f par :

$$f(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n+1},$$

et on note $F = \mathrm{Ker}(f)$. A-t-on $c_c(\mathbf{N};\mathbf{C}) = F \oplus F^{\perp}$? Commenter.

Exercice 5. *Une variante : contre exemple au critère de densité sans complétude*

Soit $H = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire L^2. On pose $F = \mathbf{1}_{[0,1/2]}^{\perp_{L^2}}$ et $F_1 = F \cap H$. Montrer que $F_1^{\perp_H} = \{0\}$ mais que F_1 n'est pas dense dans H.

Exercice 6. *Densité des translatés d'une fonction périodique*

On note $L^2_{\text{per}}(\mathbf{R}; \mathbf{C})$ l'espace vectoriel des fonctions 1-périodiques et L^2 sur $[0,1]$ muni du produit scalaire :

$$\forall f, g \in L^2_{\text{per}}(\mathbf{R}; \mathbf{C}),\ \langle f, g \rangle = \int_0^1 \overline{f} g \, dx.$$

Pour $n \in \mathbf{Z}$, on note le coefficient de Fourier d'indice n :

$$c_n(f) = \int_0^1 f(t) e^{-2i\pi nt} \, dt.$$

Soit $f \in L^2_{\text{per}}(\mathbf{R}; \mathbf{C})$. Donner une CNS pour que $\text{Vect}\{f(\cdot - a),\ a \in \mathbf{R}\}$ soit dense dans $L^2_{\text{per}}(\mathbf{R}; \mathbf{C})$.

Exercice 7. *Commuter avec les translations*

Soit $T : L^2(\mathbf{R}) \to (\mathcal{C}_b(\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ un opérateur linéaire continu tel que pour tout $a \in \mathbf{R}$, $T \circ \tau_a = \tau_a \circ T$, où τ_a est l'opérateur de translation défini par :

$$\forall f \in L^2(\mathbf{R}),\ \tau_a(f) = f(\cdot - a).$$

Montrer qu'il existe un unique $g \in L^2(\mathbf{R})$ tel que $T(f) = f * g$ pour tout $f \in L^2(\mathbf{R})$, où $*$ désigne le produit de convolution.

Exercice 8. *Version faible du théorème de Radon-Nikodym*

Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable muni de deux mesures finies positives μ et ν. On suppose que :

$$\forall A \in \mathcal{A},\ \nu(A) \leq \mu(A).$$

Montrer qu'il existe $f \in L^1(\mu)$ positive telle que :

$$\forall A \in \mathcal{A},\ \nu(A) = \int_A f \, d\mu.$$

Remarque : Pour la version forte du théorème de Radon-Nikodym, on pourra regarder dans *Analyse réelle et complexe* de Rudin

Exercice 9. *Caractérisation des fonctions de $H^1_0(0,1)$*

Montrer que, quitte à identifier un élément de $H^1(0,1)$ à son unique représentant dans $\mathcal{C}^0([0,1])$, on a :

$$H^1_0(0,1) = H^1(0,1) \cap \{f \in \mathcal{C}^0[0,1],\ f(0) = f(1) = 0\}.$$

Exercice 10. *Approximation de Galerkin*

Soient H un espace de Hilbert, a une forme bilinéaire continue et coercive sur $H \times H$, et $\varphi \in H'$. Soit $(H_n)_n$ une suite croissante de sous-espaces vectoriels fermés de H dont l'union est dense dans H.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe un unique $u_n \in H_n$ tel que :
$$\forall v \in H_n,\ a(u_n, v) = \phi(v),$$
et qu'il existe un unique $u \in H$ tel que :
$$\forall v \in H,\ a(u, v) = \phi(v).$$
2. Montrer que $u_n \to u$.

Exercice 11. *Problème de Sturm-Liouville*
Soient $f \in L^2(0,1)$, $p, q \in L^\infty(0,1)$. On suppose que q est positive et qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :
$$\forall x \in (0,1),\ p(x) \geq \alpha.$$

1. Montrer que le problème :
$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$
admet une unique solution $u \in H_0^1(0,1)$ au sens où :
$$\forall v \in \mathcal{D}(0,1),\ \int_0^1 pu'v'\,dx + \int_0^1 quv\,dx = \int_0^1 fv\,dx.$$
Donner également une caractérisation de la solution en terme de minimisation d'une "énergie".
2. Montrer que si de plus $p \in \mathcal{C}^1[0,1]$ et $q, f \in \mathcal{C}^0[0,1]$, alors u est dans $\mathcal{C}^2[0,1]$ et est solution au sens classique de $-(pu')' + qu = f$.

L'exercice suivant peut faire un joli développement. Le point clé est un argument d'analyse hilbertienne (et il en montre l'efficacité), bien qu'il nécessite d'autres ingrédients, en particulier les bases de la théorie des distributions.

Exercice 12. *Représentation des fonctions lipschitziennes*
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction L-lipschitzienne. L'objectif est de démontrer qu'il existe une fonction $g \in L^\infty(\mathbf{R})$ telle que :
$$\forall x, y \in \mathbf{R},\ f(y) - f(x) = \int_x^y g(t)\,dt.$$
On note $T = f'$ la dérivée distributionnelle de f.

1. Montrer que pour toute $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$:
$$\langle T, \phi \rangle = \lim_{h \to 0} \int_{\mathbf{R}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \phi(x)\,dx.$$
2. Montrer que T admet un unique prolongement à $L^1(\mathbf{R})$ qui est continu et de norme d'opérateur inférieure à L.
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe un unique $g_n \in L^2(-n, n)$ tel que :
$$\forall \phi \in L^2(-n,n),\ \langle T, \phi \rangle = \int_{\mathbf{R}} g_n \phi\,dx.$$
4. Montrer que si $m > n$ alors g_m et g_n coïncident sur $(-n, n)$. On pose $g = \liminf g_n$.

5. Montrer par l'absurde que $\|g\|_{L^\infty} \leq L$.

   Indication : on pourra contredire la borne obtenue à la question 2 *sur la norme de* T.

6. Montrer que $g = T$ au sens dans distributions.

7. Conclure en primitivant g.

   Indication : on pourra utiliser qu'une distribution de dérivée nulle est représentée par une constante et en particulier que si la distribution est donnée par une fonction continue, alors la fonction est constante.