Question de cours

Soit E, F deux k- espaces vectoriels.
Soit f une application linéaire de E dans F. Montrer que les assertions sont équivalentes :
1) f est continue.
2) f est continue en 0.
3) f est bornée sur la boule unité fermée.
4) f est lipschitzienne.

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer qu'une suite bornée de E converge ssi elle possède une unique valeur d'adhérence.

Exercice 2

1) Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{R})$.
2) Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un compact de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3

1) Soit (X, d) un espace métrique compact non vide, et F un application de X dans lui même. On suppose que $\forall x, y \in X, x \neq y$:

$$d(F(x), F(y)) < d(x, y)$$

En montrant que $x \mapsto d(x, F(x))$ est continue sur X, montrer que F admet un unique point fixe.
2) Sous les hypothèses de 1), montrer que $\forall x_0 \in X$, la suite définie par $x_n = F^n(x_0)$ converge vers le point fixe.

Question de cours

Soit E un $k-$espace vectoriel de dimension finie, où $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que toutes les normes sont équivalentes.

Exercice 1

On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme suivante : Pour $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, $||P||_\infty = sup_{1 \leq i \leq n} |a_i|$.
Montrer que la boule unité fermée n'est pas compacte.

Exercice 2

Montrer qu'une forme linéaire u sur un espace vectoriel E est continue ssi son noyau est fermé.

Exercice 3

Soit K un compact convexe d'un espace vectoriel normé $(E, ||.||)$. Soit f un endomorphisme continue de E tel que K est stable par f. On fixe $x \in K$. En utilisant la suite

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k(x)$$

montrer que f admet au moins un point fixe dans K.

Question de cours

Enoncer et démontrer le théorème de Heine.
Donner un exemple de fonction continue pas uniformément continue.

Exercice 1

1) Montrer que la sphère unité S de $\mathbb{R}^n$ est compacte.
2) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On note ϕ l'application :

$$\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, X \mapsto^t XAX$$

2) Montrer que ϕ est continue.
3) En déduire qu'il existe deux réels a, b tels que $\forall X \in S, a \leq \phi(X) \leq b$ et $(X_1, X_2) \in S^2$, $\phi(X_1) = a, \phi(X_2) = b$

Exercice 2

Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme : $||f||_\infty = sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$. Montrer que l'application $\phi : E \to \mathbb{R}, f \mapsto inf_{x\in[0,1]} f(x)$ est continue.

Exercice 3

($k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
Soit (E, N) un espace vectoriel normé et O un ouvert de E.
1) Montrer que $\forall x \in E, x + O := \{x + y, y \in O\}$ est un ouvert de E.
2) Montrer que $\forall A \subset E$ partie de E, $A + O := \{x + y, x \in A, y \in O\}$ est un ouvert de E.
3) Donner un exemple dans $\mathbb{R}$ où $A + O$ est un ouvert de E mais ni A ni O n'est ouvert dans E.