Question de cours

Soit E un k espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.

Exercice 1

1) Soit $A \in M_n(k)$. On suppose que la somme de chaque ligne de A (respectivement chaque colonne) est égale à $\lambda \in k$. Montrer que λ est valeur propre de A.

2) Soient $a, b, c \in k$ tels que $a + b + c \neq 0$ et tels que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ soit non inversible.

Donner les valeurs propres de A.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel de dimension fini et $f, g \in \mathscr{L}(E)$, tels que f et g soient diagonalisables et commutent. On admet le résultat suivant :

Théorème 0.0.1. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable. Soit F un sous espace vectoriel de E stable par f. Alors $f_{|F}$ est diagonalisable.*

Montrer qu'il existe une base commune de diagonalisation (On dit que f et g sont codiagonalisables).

Exercice 3

Soit k un corps. Soient $\lambda \in k, A \in M_n(k)$ et $X, Y \in M_{n,1}(k)$ tels que :

$$AX = \lambda X,\ {}^tYA = \lambda\, {}^tY,\ {}^tYX \neq 0, rg(A - \lambda Id) = n - 1$$

Montrer que λ est valeur propre simple de A.

Question de cours

Soit E un k espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que toute famille de sous-espaces propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont en somme directe.

Exercice 1

Soit k un corps, et $a_0, ..., a_{p-1} \in k$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{p-2} \\ & (0) & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix} \in M_p(k)$.

Calculer le polynôme caractéristique de A.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, non nulle et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer qu'il existe une droite vectorielle ou un plan vectoriel stable par u.

Exercice 3

Soit k un corps. Soient A, B, C trois matrices de $M_2(k)$.

Montrer que $\exists (a, b, c) \in k^3$ tel que $aA + bB + cC$ ait une valeur propre double.

Question de cours

Soit $M \in M_n(k)$ où $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Quels sont les coefficients de degré $n, n-1$ et 0 de son polynôme caractéristique ? Le démontrer.

Exercice 1

Soient M et N deux matrices réelles, semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer qu'elles le sont sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit S l'ensemble des matrices réelles stochastiques, i.e $M \in S$ si et seulement si tous ses coefficients sont positifs ou nuls, et la somme de chaque ligne de M vaut 1.
1) Montrer que tous les éléments de S ont une valeur propre commune.
2) Si P et Q sont dans S, en est-il pareil pour PQ ?
3) Soit $P \in S$ et λ valeur propre complexe de P. Montrer que $|\lambda| \leq 1$.

Exercice 3

Soit $M \in M_n(k)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
1) M est diagonalisable
2) χ_M est scindé et tout sous-espace stable par M admet un supplémentaire stable par M.