Question de cours

Soit G un groupe cyclique d'ordre $n > 0$. Montrer que G est isomorphe à $\dfrac{\mathbb{Z}}{nZ}$.
Trouver tous les groupes d'ordre 31.

Exercice 1

Caractériser les groupes dont l'ensemble des sous-groupes est fini.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel de dimension fini et $f, g \in \mathscr{L}(E)$, tels que f et g soient diagonalisables et commutent. On admet le résultat suivant :

Théorème 0.0.1. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable. Soit F un sous espace vectoriel de E stable par f. Alors $f_{|F}$ est diagonalisable.*

Montrer qu'il existe une base commune de diagonalisation (On dit que f et g sont codiagonalisables).

Exercice 3

Trouver tous les morphismes de groupes de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}$ (en précisant quelles lois munissent ces ensembles d'une structure de groupe).

Question de cours

Quels sont les sous-groupes de $\mathbb{Z}$? Le démontrer.

Exercice 1

Soit G un groupe noté multiplicativement, d'ordre impair. Montrer que tout élément de G est un carré.

Exercice 2

Soit k un corps. Soient A, B, C trois matrices de $M_2(k)$.
Montrer que $\exists (a, b, c) \in k^3_{\setminus 0}$ tel que $aA + bB + cC$ ait une valeur propre double.

Exercice 3

Soit G un groupe tel que, $\forall x \in G, x^2 = 1$. Montrer que G est abélien et que son cardinal est une puissance de 2.
Application : Soit G un groupe d'ordre $2p$ avec p premier. Montrer que G possède un élément d'ordre p.

Question de cours

Soit G un groupe.
1) Rappelez la définition de l'ordre d'un élément g dans G
2) Soit $g \in G$ tel que g est d'ordre fini d. Soit $n \in N$ tel que $g^n = e$. Montrer que $d|n$.

Exercice 1

Soient M et N deux matrices réelles, semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer qu'elles le sont sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soient G un groupe et H_1, H_2 deux sous groupes de G.
1) On suppose que $H_1 \cup H_2$ est un sous groupe de G. Montrer que l'un est inclus dans l'autre.
2) Si les ordres de H_1 et de H_2 sont finis et premiers entre eux, que dire de $H_1 \cap H_2$?

Exercice 3

Soit G un groupe abélien fini.
1) Soient $x, y \in G$ tels que $o(x) = m$, $o(y) = n$ et m et n premiers entre eux. Montrer que $o(xy) = mn$.
2) On admet ce résultat : Soient $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. Alors $\exists (m', n') \in \mathbb{N}^2$, $m' \div m$, $n' \div n$, $pgcd(m', n') = 1$ et $ppcm(m, n) = m'n'$.
Montrer alors qu'il existe $z \in G$ tel que $o(z) = ppcm(\{o(g), g \in G\})$.
3) Soit K un corps. Soit G un sous-groupe fini du groupe multiplication K^*. Montrer que G est cyclique.