Question de cours

Soit k un corps. De quelle forme sont les idéaux de $k[X]$? Donner une démonstration.

Exercice 1

Soit $(G, *)$ un groupe. Soit H une partie non vide de G, finie et stable par $*$. Montrer que H est un sous groupe de G.

Exercice 2

On pose $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$. C'est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
On pose : $\forall z = a + ib \in \mathbb{Z}[i] : N(z) = a^2 + b^2$.
1) Montrer que N est multiplicative.
2) Quels sont les inversibles de cet anneau ?
3) Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exists z_0 \in \mathbb{Z}[i]$ tel que : $N(z - z_0) < 1$.
Soit A un anneau intègre. On dit que A est **euclidien** si :
$\exists \Phi : A_{\setminus\{0\}} \to N$, telle que :
$\forall a \in A, \forall b \in A_{\setminus\{0\}}$, $\exists (q, r) \in A^2 : a = bq + r$
avec $r = 0$ ou $\Phi(r) < \Phi(b)$.
4) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien.

Exercice 3

Soit G un groupe fini et $f : G \to G$ un morphisme de groupe. Montrer que :

$$\ker(f) = \ker(f^2) \Leftrightarrow im(f) = im(f^2)$$

Question de cours

A quelle condition $\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ est-il un corps ? Donner une démonstration.

Exercice 1

Soit A un anneau intègre. On dit que A est **euclidien** si :
$\exists \Phi : A_{\backslash\{0\}} \to \mathbb{N}$, telle que :
$\forall a \in A, \forall b \in A_{\backslash\{0\}}$, $\exists (q, r) \in A^2 : a = bq + r$
avec $r = 0$ ou $\Phi(r) < \Phi(b)$.

1) Donner des exemples d'anneaux euclidiens.
Soit A un anneau intègre. On dit qu'il est **principal** si tous ses idéaux sont de la forme (a), avec $a \in A$.
2) Montrer qu'un anneau euclidien est principal.

Exercice 2

Soit G un groupe tel que $\forall x \in G$, $x^2 = e$.
1) Donner un exemple d'un tel groupe, de cardinal infini.
2) Montrer qu'un tel groupe est forcément abélien.
3) On suppose de plus G fini, et $G \neq \{e\}$. Montrer que $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $G \simeq ((\dfrac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})^n, +)$.

Exercice 3

On dit qu'un corps est **algébriquement clos** si tout polynôme de $k[X]$ de degré au moins 1 possède une racine dans k. Montrer qu'un corps fini n'est jamais algébriquement clos.

Question de cours

Soit $\Phi : A \to B$ un morphisme d'anneau.
$\ker(\Phi)$ est-il un idéal de A ?
$\mathrm{Im}(\Phi)$ est-il un idéal de B ? Si oui, donner une démonstration, si non donner un contre-exemple et une condition supplémentaire pour que ce soit vrai.

Exercice 1

Soit G un groupe. Pour tout élément g de G, on appelle **ordre** de g l'entier :

$$d = \min\{n \in \mathbb{N}_{\setminus\{0\}}, g^n = e\}$$

quand cet ensemble est non vide. On dit que g est d'ordre infini sinon.
1) Soit $g \in G$ tel que g est d'ordre fini d. Soit $n \in N$ tel que $g^n = e$. Montrer que $d|n$.
2) Soient $x, y \in G$. On suppose que xy est d'ordre fini $n \in G$. Montrer que yx est également d'ordre n.

Exercice 2

Soit A un anneau commutatif unitaire et I un idéal de A. On appelle **radical** de I l'ensemble noté $\sqrt{I} := \{x \in A | \exists n \in N^*, x^n \in I\}$.
1) Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A.
2) Déterminer le radical d'un idéal de $\mathbb{Z}$.

Exercice 3

Trouver tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(Z, +)$.