Question de cours

Enoncer et démontrer le lemme des noyaux. A quoi sert-il ?

Exercice 1

Soit $A \in M_n(k)$ et $P \in k[X]$.
a) Montrer que si $\lambda \in k$ est valeur propre de A, alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(A)$.
b) La réciproque est-elle vraie ? (i.e si je prend une valeur propre de $P(A)$, est-elle de la forme $P(\lambda)$ avec λ valeur propre de A ?) Montrer que c'est vrai sur $\mathbb{C}$.

Exercice 2

Soit k corps fini à q éléments. Soit E un k-ev de dimension finie et $f \in L(E)$.
Montrer que f est diagonalisable dans E si et seulement si $f^q = f$.
Indication : Montrer que $X^q - X = \prod_{\alpha \in k} (X - \alpha)$.

Exercice 3

Soit E un k ev de dimension infinie et $u, v \in L(E)$ deux endomorphismes qui commutent, et tels que u et v admettent un polynôme annulateur, respectivement notés P et Q. Montrer alors que $u+v$ en admet également un.

Question de cours

Donner et démontrer un critère de diagonabilité utilisant les polynômes d'endomorphisme.

Exercice 1

Soit E un k-ev de dimension finie. Soit $f \in L(E)$ inversible. Montrer que f^{-1} est un polynôme en f.

Exercice 2

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur P pour qu'il soit le polynôme minimal d'une matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$.

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{C}$ ev de dimension $n \geq 1$ et $u \in L(E)$. Montrer qu'il existe $(d, n) \in L(E)^2$ tels que :
a) $u = d + n$
b) d et n commutent
c) d est diagonalisable et n est nilpotent

Remarque : en fait, on a même l'unicité d'un tel couple, et on peut montrer que d et n sont des polynômes en u. On appelle cette écriture la décomposition de Dunford.

Question de cours

Donner et démontrer l'existence et l'unicité du polynôme minimal d'un endomorphisme en dimension finie (en utilisant un idéal).
Montrer que l'endomorphisme suivant ne possède pas de polynôme minimal :

$$D : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], P \mapsto P'$$

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Sans calcul, montrer que A est diagonalisable.
b) Trouver le polynôme minimal P de A.
c) Déterminer le reste de la division euclidienne de T^n par $P(T)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. En déduire $A^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Soit E de dimension finie n. Soit f nilpotent, d'indice de nilpotence q.
1) Montrer que $x_0 \in E$ tel que $(x_0, \ldots, f^{q-1}(x_0))$ forme une famille libre de E. En déduire que $q \leq n$.
2) Montrer que $Id - f$ est inversible et donner son inverse.
3) Soit $N \in M_n(\mathbb{R})$ d'indice de nilpotence 2. $\forall p \in \mathbb{N}$, calculer $(Id + N)^p$.
4) Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer M^{100}.

Exercice 3

Trouver tous les matrices $X \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$