Question de cours

Donner la définition d'une probabilité et démontrer la propriété de la continuité croissante d'une probabilité.

Exercice 1

1) Rappeler la définition de la convergence uniforme. Donner quelle convergence elle implique.
2) $\forall n \in \mathbb{N}$, on note

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{1+(x-n)^2}$$

Montrer que cette suite converge simplement mais pas uniformément.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. On choisit au hasard un des nombres entiers dans $1, \ldots, n$. Tous les choix étant équiprobables. Soit $p \leq n$. On note A_p l'évènement "le nombre choisit est divisible par p".
1) Calculer $P(A_p)$, quand $p|n$.
2) Montrer que si $p_1, \ldots p_k$ sont des diviseurs premiers de n distincts, alors les évènements $A_{p_1}, \ldots, A_{p_K}$ sont indépendants.
3) On définit la fonction d'Euler :

$$\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$n \mapsto |\{k \in [1, \ldots n], (k,n) = 1\}|$$

Montrer que $\phi(n) = n \prod_{p|n, premier} (1 - 1/p)$.

Exercice 3

Soit $a < b \in \mathbb{R}$. Soient $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$. On suppose que $M \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\forall x \in]a,b[, |f_n'(x)| \leq M$, et on suppose que $(f_n)_{n \ \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $[a,b]$. Montrer que la convergence est uniforme.

Question de cours

1) Donner la définition d'une tribu et montrer que si T est une tribu, alors l'ensemble vide est un élément de T, et T est stable par intersection finie ou dénombrable.
2) Soient E et F des ensembles, et T une tribu sur F, et $\phi : E \to F$ une application. Montrer que $T' = \{\phi^{-1}(A), A \in T\}$ est une tribu sur E.

Exercice 1

1) Rappeler la définition de la convergence normale d'une série de fonctions.
2) Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I. Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si :
a) $\sum f_n$ converge simplement.
b) La suite des restes converge uniformément vers la fonction nulle.

3) Montrer que la série de fonction, de terme général :

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{(-1)^n x^n}{n}$$

converge uniformément mais pas normalement.

Exercice 2

On considère n "menteurs" : $I_1, \dots, I_n$: I_1 reçoit une information (oui ou non), et la donne à I_2,... et ainsi de suite, et I_n transmet l'information au monde. Chacun d'entre eux peut soit dire la vérité, avec une probabilité p soit mentir, avec une probabilité $1-p$. Leur réponses sont indépendantes.
On pose $\Omega = \{(w_1, \dots, w_n)\}$ l'ensemble des $n-$ uplets possibles, où $w_i = 1$ si I_i a dit la vérité, -1 sinon.
On pose $A_i =$"I_i transmet l'information initiale".
$B_i =$"I_i transmet ce qu'il a entendu".
$p_i = P(A_i)$.
Calculer la probabilité p_n que l'information soit fidèlement transmise.
Que se passe t-il quand $n \to \infty$?

Exercice 3

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales définies sur $\mathbb{R}$.
1) On suppose que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Montrer que :
$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N ||P_n - P_m||_\infty \leq \epsilon$
2) Montrer que la fonction limite est un polynôme.
3) Soit $d \in \mathbb{N}$. On suppose maintenant que chaque P_n est de degré au plus d. Montrer que la convergence uniforme est équivalente à la convergence des suites de chaque coefficient des P_n.

Question de cours

Donner et démontrer la formule des probabilités totales, et la formule de Bayes.
Application : Une maladie M affecte un français sur mille. On dispose d'un test qui détecte la maladie avec une fiabilité de 99% mais on obtient un résulat faussement positif pour 0.2% des personnes saines testées.
Quelle est la probabilité que la personne soit réellement malade quand le teste est positif ?

Exercice 1

Rappeler la définition de la convergence absolue. Quelle convergence implique t-elle ? Par quelle convergence est-elle impliquée ? Est-ce que la convergence uniforme implique la convergence absolue ?

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}, A_1, \ldots, A_n$ des évènements indépendants. Montrer que la probabilité qu'aucun des A_i ne soit réalisé est majorée par $exp(-\sum_{i=1}^{n} P(A_i))$.

Exercice 3

a) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur un segment $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\exists K > 0$ telle que toutes les fonctions f_n soient $K-$lipschitziennes. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f sur I. En utilisant une subdivision de I, montrer que la convergence est uniforme.
b) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions convexes de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers f sur $]a, b[$. En se ramenant à la question précédente, montrer que pour tout segment $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$ la convergence est uniforme. La convergence est-elle uniforme sur $[a, b]$ tout entier ?