Question de cours

Donner et démontrer le théorème d'intervertion limite/intégrale sur un segment. Donner un contre-exemple quand la convergence n'est pas uniforme.

Exercice 1

Soit $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$ définie pour tout $x \in [0, +\infty[$.
1) Montrer que f_n converge simplement vers une fonction g à déterminer.
2) En utilisant la formule de Stirling, montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 2

1) Rappeler la définition de la convergence uniforme. Donner quelle convergence elle implique.
2) $\forall n \in \mathbb{N}$, on note

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{1 + (x - n)^2}$$

Montrer que cette suite converge simplement mais pas uniformément.

Exercice 3

Soit $a < b \in \mathbb{R}$. Soient $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$. On suppose que $M \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\forall x \in]a, b[, |f_n'(x)| \leq M$, et on suppose que $(f_n)_{n \ \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $[a, b]$. Montrer que la convergence est uniforme.

Question de cours

Donner et démontrer le théorème de la double limite.
Donner un contre-exemple quand la convergence n'est pas uniforme.
Démontrer alors que si une suite $(f_n)_n$ de fonctions converge uniformément vers f sur I, et si chaque f_n est continue en $x \in I$, alors f est aussi continue en x.

Exercice 1

Rappeler la définition de la convergence absolue. Quelle convergence implique t-elle ? Par quelle convergence est-elle impliquée ? Est-ce que la convergence uniforme implique la convergence absolue ?

Exercice 2

Soit $\alpha \in [0, 2[$.

1) Etudier l'existence et la continuité sur $\mathbb{R}_+^*$ de $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2-\alpha} e^{-nx}$

2) Si $\alpha = 1$, a-t-on une convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 3

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales définies sur $\mathbb{R}$.
1) On suppose que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Montrer que :
$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N ||P_n - P_m||_\infty \leq \epsilon$
2) Montrer que la fonction limite est un polynôme.
3) Soit $d \in \mathbb{N}$. On suppose maintenant que chaque P_n est de degré au plus d. Montrer que la convergence uniforme est équivalente à la convergence des suites de chaque coefficient des P_n.

Question de cours

Donner (sans démonstration) le théorème d'approximation de Weierstrass. Application :
Soit $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, telle que son intégrale contre tout monôme t^n soit nul. Montrer que f est la fonction nulle.

Exercice 1

1) Rappeler la définition de la convergence normale d'une série de fonctions.
2) Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I. Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si :
a) $\sum f_n$ converge simplement.
b) La suite des restes converge uniformément vers la fonction nulle.
3) Montrer que la série de fonction, de terme général :

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{(-1)^n x^n}{n}$$

converge uniformément mais pas normalement.

Exercice 2

On pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$ pour tout entier n et tout $x > 0$.
1) Démontrer la convergence simple de la série de terme général f_n.
2) On note $f = \sum f_n$.
La fonction f est-elle continue/ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$?

Exercice 3

a) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur un segment $I = [a,b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\exists K > 0$ telle que toutes les fonctions f_n soient $K-$lipschitziennes. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f sur I. En utilisant une subdivision de I, montrer que la convergence est uniforme.
b) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions convexes de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers f sur $]a,b[$. En se ramenant à la question précédente, montrer que pour tout segment $[\alpha,\beta] \subset]a,b[$ la convergence est uniforme. La convergence est-elle uniforme sur $[a,b]$ tout entier ?