Feuille d'exercices 1. Développements limités

I Tests de compréhension

Les tests sont à faire pour vérifier que vous comprenez le cours, les réponses se trouvent en fin de feuille de TD.

Troncature

Test 1. Le formulaire donne la formule suivante :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + x^9\varepsilon(x), \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

(a) En déduire un développement limité à l'ordre 5 de $\sin(x)$ quand $x \to 0$, et donner sa partie régulière.

(b) Même question à l'ordre 4.

Test 2. Donner le développement limité d'ordre 2 en 0 du polynôme $P(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 3$.

Test 3. Trouver un exemple de fonction f dont le développement limité à l'ordre 2 en 0 est

$$f(x) = 7 + 13x - 24x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

Substitution

Test 4. Donner le développement limité en 0 des fonctions suivantes

(a) $-\ln(1+x)$ et $\ln(1-x)$, à l'ordre 3 (b) $2\cos(x)$ et $\cos(2x)$, à l'ordre 3

Test 5. Donner le développement limité en 0 de

(a) $\sqrt[3]{1+3x}$ à l'ordre 2 (b) $\sqrt[4]{1+x^2}$ à l'ordre 4

Test 6. Soit $f(x) = 1 + x - x^2 + x^2\varepsilon(x)$. Déterminer le développement limité à l'ordre maximum possible en 0 de $f(x^3)$.

Test 7. A l'aide de développements limités, déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x}$

II Exercices

Sommes et produits de développements limités

Exercice 1. Calculez le développement limité quand $x \to 0$ des fonctions suivantes :

(a) $\sin(2x) - 2\cos(x)$, à l'ordre 4 (b) $(x + x^2)^2 + \cos(x)$, à l'ordre 3

(c) $\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}$, à l'ordre 2

Indications. Utilisez le formulaire des développements limités des fonctions standard. Profitez-en pour les apprendre par cœur !

Solution.
(a) Cette première question est l'occasion de détailler pas à pas la résolution d'un tel exercice, afin de bien comprendre les mécaniques de raisonnement et de calcul à mettre en œuvre. Dans les questions suivantes, nous irons un peu plus vite et rédigerons les solutions au niveau de détail qu'il faut que vous maîtrisiez.

La première étape du calcul ici est de déterminer le développement limité de chacune des fonctions à l'ordre 4. Il suffira de sommer ensuite le résultat.

On sait que (voir formulaire), pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\sin(u) = u - \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{120}u^5 + \ldots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}u^{2k+1} + u^{2k+1}\varepsilon_1(u),$$

où la fonction $\varepsilon_1(u)$ tend vers 0 lorsque u tend vers 0. On veut ici arrêter le développement à l'ordre 4. On remarque (et c'est parce que la fonction sinus est impaire) que le terme en u^4 est absent du DL précédent. Cela signifie simplement que son coefficient est nul. Ainsi le DL à l'ordre 4 qui nous intéresse s'écrit :

$$\sin(u) = u - \frac{1}{6}u^3 + u^4\varepsilon_2(u), \text{ avec } \lim_{u \to 0} \varepsilon_2(u) = 0.$$

Mais dans cet exercice, nous cherchons le DL de la fonction $\sin(2x)$ (et non simplement $\sin(x)$) lorsque $x \to 0$. Comme $2x$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, il suffit donc de poser $u = 2x$ dans le DL précédent pour obtenir :

$$\sin(2x) = 2x - \frac{2^3}{6}x^3 + 2^4x^4\varepsilon_2(2x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + 16x^4\varepsilon_2(2x).$$

Enfin, et ce afin de ne pas traîner des facteurs numériques superflus dans les expressions que nous manipulons, il est pratique de poser $\varepsilon_3(x) = 16\varepsilon_2(2x)$ et l'on obtient finalement :

$$\sin(2x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + x^4\varepsilon_3(x), \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon_3(x) = 0.$$

Pour la fonction cosinus, on sait que (voir formulaire), pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\cos(u) = 1 - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{24}u^4 - \frac{1}{720}u^6 + \ldots + \frac{1}{(2k)!}(-1)^k u^{2k} + u^{2k}\varepsilon_4(u),$$

où la fonction $\varepsilon_4(u)$ tend vers 0 lorsque u tend vers 0. En s'arrêtant à l'ordre 4, et en posant simplement $u = x$ on écrit :

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + x^4\varepsilon_5(x), \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon_5(x) = 0.$$

Finalement on obtient :

$$\sin(2x) - 2\cos(x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + x^4\varepsilon_3(x) - 2\left[1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + x^4\varepsilon_5(x)\right],$$

soit après simplification et regroupement des termes de même degré :

$$\sin(2x) - 2\cos(x) = -2 + 2x + x^2 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + x^4\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0,$$

et où l'on a posé $\varepsilon(x) = \varepsilon_3(x) - 2\varepsilon_5(x)$ qui a bien la limite voulue en 0.

(b) Nous allons appliquer la même démarche que précédemment (et aller beaucoup plus vite). On développe l'expression polynomiale : $(x + x^2)^2 = x^2 + 2x^3 + x^4$, son DL à l'ordre 3 est donc $x^2 + 2x^3 + x^3\varepsilon_1(x)$ où la fonction $\varepsilon_1(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0. On remarque ici que la fonction ε_1 est tout simplement donnée par : $\varepsilon_1(x) = x$.

De même (cf formulaire), $\cos(x) = 1 - x^2/2 + x^3\varepsilon_2(x)$ où $\lim_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0$. On remarque également que la fonction cosinus étant paire, le terme d'ordre 3 est absent du DL, son coefficient est nul.

En sommant les deux DL obtenus et en regroupant les termes de même degré, on obtient :

$$(x + x^2)^2 + \cos(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + 2x^3 + x^3\varepsilon(x),$$

où l'on a posé $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)$ de sorte que $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

(c) Ici on utilise la formule (voir formulaire) : pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$(1 + u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2}u^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - k + 1)}{k!}u^k + u^k\varepsilon_1(u),$$

où $\lim_{u \to 0} \varepsilon_1(u) = 0$. On va prendre $\alpha = 1/2$ et $\alpha = 1/3$ respectivement pour les premier et deuxième termes qui nous intéressent ici. On a alors

$$\sqrt{1 + u} = (1 + u)^{1/2} = 1 + u/2 - u^2/8 + u^2\varepsilon_1(u)$$

et

$$\sqrt[3]{1 + v} = (1 + v)^{1/3} = 1 + v/3 - v^2/9 + v^2\varepsilon_3(v)$$

avec $\lim_{u\to 0}\varepsilon_1(u)=\lim_{v\to 0}\varepsilon_2(v)=0$. On pose finalement $u=2x$ et $v=3x$ (qui tendent bien vers 0 quand $x\to 0$) pour obtenir après simplification et regroupement :

$$\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}=1+x-\frac{1}{2}x^2+4x^2\varepsilon_1(2x)-\big(1+x-x^2+9x^2\varepsilon_2(3x)\big)=\frac{1}{2}x^2+x^2\varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x)=4\varepsilon_1(2x)-9\varepsilon_2(3x)$ qui tend vers 0 lorsque $x\to 0$.

Exercice 2. Calculez le développement limité à l'ordre 3 quand $x\to 0$ des fonctions suivantes :

(a) $(1+x^2)^2\cos x$ (b) $e^x\sin(x)$ (c) $\cos^2 x$ (d) $e^{2x}\ln(1+x)$

Indications. Pour déterminer le DL d'un produit de fonctions il suffit de calculer le produit des DL respectifs en allant à l'ordre cherché pour chacune des deux fonctions. On tronque ensuite le produit obtenu toujours à ce même ordre.

Solution.
(a) On écrit donc

$$(1+x^2)^2=1+2x^2+x^3\varepsilon_1(x),\text{ avec }\lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x)=0,$$

d'une part et

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+x^3\varepsilon_2(x),\text{ avec }\lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x)=0,$$

d'autre part. On remarque que dans les deux cas, le terme en x^3 du DL est absent car son coefficient est nul, mais ce sont bien des DL à l'ordre 3 que nous avons écrit.

On multiplie ensuite ces deux expressions entre elles en ne gardant que les termes d'ordre au plus 3, le reste étant absorbé dans la définition d'une nouvelle fonction $\varepsilon(x)$ qui tend vers 0 lorsque $x\to 0$:

$$\begin{aligned}(1+x^2)^2\cos x &= \left[1+2x^2+x^3\varepsilon_1(x)\right]\left[1-x^2/2+x^3\varepsilon_2(x)\right]\\ &= 1+2x^2+x^3\varepsilon_1(x)-x^2/2\left[1+2x^2+x^3\varepsilon_1(x)\right]+x^3\varepsilon_2(x)\left[1+2x^2+x^3\varepsilon_1(x)\right]\\ &= 1+2x^2+x^3\varepsilon_1(x)-x^2/2-x^4-x^5\varepsilon_1(x)/2+x^3\varepsilon_2(x)+2x^5\varepsilon_2(x)+x^6\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)\\ &= 1+3x^2/2+x^3\varepsilon(x).\end{aligned}$$

Avec, si l'on veut détailler les calculs (ce qui n'est pas demandé !), $\varepsilon(x)=-x+\varepsilon_1(x)-x^2\varepsilon_1(x)/2+\varepsilon_2(x)+2x^2\varepsilon_2(x)+x^3\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)$.

(b) Avec la même méthode que précédemment :

$$\begin{aligned}e^x\sin(x) &= \left[1+x+x^2/2+x^3/6+x^3\varepsilon_1(x)\right]\left[x-x^3/6+x^3\varepsilon_2(x)\right]\\ &= x+x^2+x^3/3+x^3\varepsilon(x).\end{aligned}$$

où la fonction ε regroupe les fonctions ε_1 et ε_2 ainsi que tous les termes (après factorisation par x^3) d'ordres 1 et supérieurs et tend de fait vers 0 lorsque x tend vers 0.

(c) De même :

$$\begin{aligned}\cos^2(x) &= \left[1-x^2/2+x^3\varepsilon_1(x)\right]^2\\ &= 1-x^2+x^3\varepsilon(x),\end{aligned}$$

où $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.

(d) Et toujours avec la même méthode :

$$\begin{aligned}e^{2x}\ln(1+x) &= \left[1+2x+(2x)^2/2+(2x)^3/6+x^3\varepsilon_1(x)\right]\left[x-x^2/2+x^3/3+x^3\varepsilon_2(x)\right]\\ &= x+3x^2/2+4x^3/3+x^3\varepsilon(x),\end{aligned}$$

où $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.

Exercice 3 (Pour aller plus loin)**.** Calculer le développement limité en 0 de $f(x)\cdot g(x)$ à l'ordre maximum possible, sachant que : $f(x)=x-x^2+x^2\varepsilon_1(x)$, $\lim_{x\to 0}\ \varepsilon_1(x)=0$, et $g(x)=2x+x^2+x^2\varepsilon_2(x)$, $\lim_{x\to 0}\ \varepsilon_2(x)=0$.

Indications. En général, l'ordre maximum possible est donné par le plus petit ordre disponible dans chacun des termes du produit. Ici on peut faire mieux.

Solution. Le DL des fonctions f et g étant donné chacun à l'ordre 2, nous pouvons a priori déterminer le DL de $f(x)\cdot g(x)$ à cet ordre. Cependant, remarquons que $f(x) = x(1-x+x\varepsilon_1(x))$ et que $g(x) = x(2+x+x\varepsilon_2(x))$. Ainsi le produit des termes entre parenthèse, qui sont chacun d'ordre 1, donne un DL que l'on doit tronquer à l'ordre 1, mais comme l'ensemble est multiplié pâr x^2, le DL de $f\cdot g$ obtenu est finalement d'ordre 3. En détail, cela donne :

$$\begin{array}{rcl} f(x)\cdot g(x) & = & \left[x-x^2+x^2\varepsilon_1(x)\right]\left[2x+x^2+x^2\varepsilon_2(x)\right] \\ & = & x^2\left[1-x+x\varepsilon_1(x)\right]\left[2+x+x\varepsilon_2(x)\right] \\ & = & x^2\left[2-x+x\varepsilon(x)\right] \\ & = & 2x^2-x^3+x^3\varepsilon(x), \end{array}$$

où $\varepsilon(x)$ regroupe les termes contenant les fonctions $\varepsilon_1(x)$ et $\varepsilon_2(x)$ ainsi que les termes (après factorisation par x^3) d'ordre 1 et supérieurs, et $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

Se ramener à des développements limités connus

Exercice 4 (Attention au piège)**.** On veut calculer le développement limité de e^{1+x} à l'ordre 2 quand $x \to 0$.

(a) Que va-t-on obtenir si on fait la substitution $u = 1+x$ dans le développement limité de e^u en 0 ?

(b) En utilisant que $e^{a+b} = e^a e^b$, déterminer le développement limité de e^{1+x} à l'ordre 2 quand $x \to 0$.

Indications. Attention : un développement limité fait intervenir les puissances successives d'une quantité (peu importe qu'on l'appelle x, u, ou autre chose...) qui, par construction, doit être « petite », en d'autres termes, qui doit tendre vers 0. Ici la quantité $u = 1+x$ tend-elle vers 0 lorsque x tend vers 0 ?

Solution. (a) Le DL de la fonction exponentielle donne $e^u = 1+u+u^2/2+u^2\varepsilon(u)$ avec $\lim_{u\to 0}\varepsilon(u)=0$, donc

$$e^{1+x} = 1+(1+x)+(1+x)^2/2+(1+x)^2\varepsilon(1+x)$$

Ce n'est pas un développement limité ! Dans le terme de reste $(1+x)^2\varepsilon(1+x)$, le facteur $\varepsilon(1+x)$ ne tend pas vers 0 quand $x\to 0$, et on a développé en puissance du facteur $(1+x)$ qui ne tend pas vers 0 lorsque $x \to 0$...

Important : Pour substituer x à u, on doit avoir $x \to 0$ si $u \to 0$.

(b) On veut se ramener à la fonction e^x dont on connaît le DL en 0. On écrit donc $e^{1+x} = e^1 e^x = e\cdot e^x$. Il y a simplement un facteur e (c'est un nombre $e \simeq 2,71828...$) devant la fonction exponentielle. On obtient donc

$$\begin{array}{rcl} e^{1+x} & = & e(1+x+x^2/2+x^2\varepsilon_1(x)) \quad (\text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x)=0) \\ & = & e+ex+ex^2/2+x^2\varepsilon(x) \end{array}$$

où $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$ en ayant posé $\varepsilon(x) = e\varepsilon_1(x)$.

Commentaire. La moindre des choses est que le coefficient constant du DL soit la limite en 0 de la fonction. Ici, quand $x \to 0$, $e^{1+x} \to e$, c'est bien le terme constant du DL obtenu en (b).

Exercice 5 (Exercice important)**.** Calculer les développements limités suivants à l'ordre 2 quand $x \to 0$ en se ramenant à des DL connus :

(a) $\dfrac{1}{4+3x}$ (b) $\dfrac{3}{x-2}$ (c) $\sqrt{2+x}$

(d) $\sqrt[3]{2+3x}$ (e) $\ln(5+3x)$ (f) e^{3+2x}

Solution.

(a) $\frac{1}{4+3x} = \frac{1}{4(1+\frac{3}{4}x)} = \frac{1}{4}\times\frac{1}{1+u}$ pour $u = \frac{3x}{4}$ qui tend bien vers 0 quand $x\to 0$.
On connait le développement limité de $\frac{1}{1+u}$ au voisinage de 0 à l'ordre 2, donné par

$$\frac{1}{1+u} = 1-u+u^2+u^2\varepsilon(u)$$

Par substitution de u par sa valeur, on obtient

$$\frac{1}{1+u} = 1 - \frac{3}{4}x + \frac{9}{16}x^2 + \frac{9}{16}x^2\varepsilon(\frac{3}{4}x) = 1 - \frac{3}{4}x + \frac{9}{16}x^2 + x^2\varepsilon_1(x)$$

Multipliant par $\frac{1}{4}$, on obtient

$$\frac{1}{4+3x} = 1 - \frac{3}{16}x + \frac{9}{64}x^2 + x^2\varepsilon_2(x)$$

(b) $\frac{3}{x-2} = \frac{3}{-2(1-\frac{x}{2})} = -\frac{3}{2} \times \frac{1}{1-u}$ pour $u = \frac{x}{2}$ qui tend bien vers 0 quand $x \to 0$.
On connait le développement limité de $\frac{1}{1-u}$ au voisinage de 0 à l'ordre 2, donné par

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^2\varepsilon(u)$$

(On peut aussi le retrouver en utilisant le DL de $\frac{1}{1+u}$ par substitution de u par $-u$)

Par substitution de u par sa valeur, on obtient

$$\frac{1}{1-u} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^2\varepsilon(\frac{x}{2}) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + x^2\varepsilon_1(x)$$

Multipliant par $-\frac{3}{2}$, on obtient

$$\frac{3}{x-2} = -\frac{3}{2} - \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}x^2 + x^2\varepsilon_2(x)$$

(c) $\sqrt{2+x} = \sqrt{2(1+\frac{x}{2})} = \sqrt{2} \times \sqrt{1+u}$ pour $u = \frac{x}{2}$ qui tend vers 0 quand $x \to 0$.
On connait le dévelopement limité de $\sqrt{1+u}$ au voisinage de 0 à l'ordre 2, donné par

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + u^2\varepsilon(u)$$

Par substitution de u par sa valeur, on obtient

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{32}x^2 + \frac{1}{4}x^2\varepsilon(\frac{x}{2}) = 1 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{32}x^2 + x^2\varepsilon_1(x)$$

Multipliant par $\sqrt{2}$, on obtient

$$\sqrt{2+x} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{\sqrt{2}}{32}x^2 + x^2\varepsilon_2(x)$$

(d) $\sqrt[3]{2+3x} = \sqrt[3]{2(1+\frac{3}{2}x)} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{1+u}$ pour $u = \frac{3}{2}x$ qui tend vers 0 quand $x \to 0$.
On connait le développement limité de $\sqrt[3]{1+u}$ au voisinage de 0 à l'ordre 2, donné par

$$\sqrt[3]{1+u} = 1 + \frac{1}{3}u - \frac{1}{9}u^2 + u^2\varepsilon(u)$$

Par substitution de u par sa valeur, on obtient

$$\sqrt[3]{1+u} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{4}x^2\varepsilon(\frac{3}{2}x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + x^2\varepsilon_1(x)$$

Multipliant par $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$, on obtient

$$\sqrt[3]{2+3x} = 2^{\frac{1}{3}} + \frac{2^{\frac{1}{3}}}{2}x - \frac{2^{\frac{1}{3}}}{4}x^2 + x^2\varepsilon_2(x)$$

(e) $\ln(5+3x) = \ln(5(1+\frac{3}{5}x)) = \ln(5) + \ln(1+u)$ pour $u = \frac{3}{5}x$ qui tend vers 0 quand $x \to 0$.
Note : on a utilisé la formule $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$
On connait le développement limité de $\ln(1+u)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2, donné par

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u)$$

Par substitution de u par sa valeur, on obtient

$$\ln(1+u) = \frac{3}{5}x - \frac{9}{50}x^2 + \frac{9}{25}x^2\varepsilon(\frac{3}{5}x) = \frac{3}{5}x - \frac{9}{50}x^2 + x^2\varepsilon_1(x))$$

Additionant $\ln 5$, on obtient
$$\ln(5+3x) = \ln 5 + \frac{3}{5}x - \frac{9}{50}x^2 + x^2\varepsilon_1(x))$$

(f) $e^{3+2x} = e^3e^{2x} = e^3e^u$ pour $u = 2x$ que tend vers 0 quand $x \to 0$. (Rappel : $e^{a+b} = e^ae^b$)
On connait le développement limité de e^u au voisinage de 0 à l'ordre 2, donné par
$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + u^2\varepsilon(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u)$$
Par substitution de u par sa valeur, on obtient
$$e^u = 1 + 2x + \frac{4}{2}x^2 + 4x^2\varepsilon(2x) = 1 + 2x + 2x^2 + x^2\varepsilon_1(x)$$
Multipliant par e^3, on obtient
$$e^{3+2x} = e^3 + 2e^3x + 2e^3x^2 + x^2\varepsilon_2(x)$$

Commentaire. Attention au piège : on ne peut pas poser $u = 3 + 2x$ pour ensuite utiliser le DL de e^u en 0 parce que quand $x \to 0$, $3 + 2x$ tend vers 3, pas vers 0 !

Composition de développements limités

Exercice 6. Calculez le developpement limité à l'ordre 3 quand $x \to 0$ des fonctions suivantes :

(a) $\sin(\ln(1+x))$ (b) $\ln(1+\sin(2x))$

Solution.

(a) On connait le développement limité de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 3, donné par
$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$$
$\lim_{x\to 0} \ln(1+x) = \ln 1 = 0$ donc, $\sin(\ln(1+x)) = \sin(u)$ avec $u \to 0$ lorsque $x \to 0$.
On connait le développement limité de $\sin(u)$ au voisinage de 0 à l'ordre 3, donné par
$$\sin(x) = \frac{u}{1!} - \frac{u^3}{3!} + u^3\varepsilon(u)$$
Par substitution, on obtient
$$\sin(\ln(1+x)) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) - \frac{1}{6} \times [x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)]^3 + [x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)]^3\varepsilon(u)$$
Tous les termes de degré plus grand que 3 seront négligeables et seront regroupés dans le terme du reste. Donc, on obtient
$$\sin(\ln(1+x)) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon_1(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}x^3 + +x^3\varepsilon_1(x)$$
Rappel : $((a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)$

(b) $\sin(2x) = \sin(u)$ pour $u = 2x$. On connait le développement limité de $\sin(u)$ au voisinage de 0 à l'ordre 3, donné par
$$\sin(u) = \frac{u}{1!} - \frac{u^3}{3!} + u^3\varepsilon(u)$$
Par substitution de u par sa valeur, on obtient
$$\sin(2x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + 8x^3\varepsilon(2x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + x^3\varepsilon_1(x)$$

De plus, $\lim_{x\to 0}\sin(2x) = sin(0) = 0$ donc, $\ln(1+\sin(2x) = \ln(1+v)$ avec $v \to 0$ lorsque $x \to 0$.
On connait le développement limité de $\ln(1+v)$ au voisinage de 0 à l'ordre 3, donné par

$$\ln(1+v) = v - \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} + v^3\varepsilon(v)$$

Par substitution, on obtient

$$\ln(1+\sin(2x)) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + x^3\varepsilon_1(x) - \frac{1}{2}\times[2x - \frac{4}{3}x^3 + x^3\varepsilon_1(x)]^2 + \frac{1}{3}\times[2x - \frac{4}{3}x^3 + x^3\varepsilon_1(x)]^3 + [2x - \frac{4}{3}x^3 + x^3\varepsilon_1(x)]^3\varepsilon(v)$$

Négligeant tous les termes de degré plus grand que 3 qui seront regroupés dans le terme du reste, on obtient

$$\ln(1+\sin(2x)) = 2x - \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + x^3\varepsilon_2(x) = 2x - 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + x^3\varepsilon_2(x)$$

Exercice 7. Calculez le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $f(x) = \ln(\cos(x))$.

Solution.

Le développement limité de $\cos(x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2, est donné par

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + x^2\varepsilon(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

De plus, $\lim_{x\to 0}\cos(x) = \cos(0) = 1 \neq 0$. D'ou, par substitution, on obtient

$$\ln(\cos(x)) = \ln(1 - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)) = \ln(1-u)$$

pour $u = \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$.
On connait le développement limité de $\ln(1+u)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2, et par substitution du u par un $-u$, on obtient

$$\ln(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(-u)$$

Par substitution de u par sa valeur, on obtient

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) + [\frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)]^2\varepsilon_1(x)$$

En négligeant tous les termes de degré plus grand que 2 qui seront regroupés dans le terme du reste, on obtient

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon_2(x)$$

Exercice 8 (Attention au piège). Calculez le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de

$$f(x) = e^{e^x}$$

Solution.

Rappelons que le dévelopement limité de e^x au voisinage de 0 à l'ordre 2, est donné par

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$$

et qui tend vers 1 lorsque $x \to 0$. La limite ne tend pas vers 0 alors qu'on connait le développement limité de l'exponentielle, uniquement au voisinage de 0. Donc, une substitution immédiate $u = e^x$ ou $u = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ ne permet pas de se ramener à un DL en 0. D'où l'intérêt de décomposer e^{e^x} comme suit

$$e^{e^x} = e^{1+x+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)} = e.e^{x+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)} = ee^u$$

pour $u = x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ qui tend bien vers 0 lorsque $x \to 0$. Par substitution, on obtient

$$e^u = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) + \frac{1}{2}[x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)]^2 + [x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)]^2\varepsilon_1(x)$$

En négligeant tous les termes de degré plus grand que 2 qui seront regroupés dans le terme du reste, on obtient

$$e^u = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon_2(x) = 1 + x + x^2 + x^2\varepsilon_2(x)$$

Multipliant par e, on obtient

$$e^{e^x} = e + ex + ex^2 + x^2\varepsilon_3(x)$$

Exercice 9. Calculez le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de

(a) $\sqrt{e^x + \cos(x)}$ (b) $\ln\left(\frac{e^x}{2} + \sin x\right)$

Solution. (a) On cherche un DL à l'ordre 2 en 0 de $\sqrt{e^x + \cos(x)}$: il faut un DL à l'ordre 2 de $e^x + \cos(x)$.

$$\sqrt{e^x + \cos(x)} = \sqrt{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x)\right) + \left(1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_2(x)\right)} = \sqrt{2 + x + x^2\varepsilon_3(x)} \tag{1}$$

On connait le DL de $\sqrt{1+u}$ avec $u \to 0$, il faut donc se ramener à ce cas. On met donc 2 en facteur dans la racine :

$$\begin{aligned}
\sqrt{e^x + \cos(x)} &= \sqrt{2 + x + x^2\varepsilon_3(x)} = \sqrt{2(1 + \frac{x}{2} + x^2\varepsilon_4(x))} \\
&= \sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{x}{2} + x^2\varepsilon_4(x)} \\
&= \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + x^2\varepsilon_4(x)\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{x}{2} + x^2\varepsilon_4(x)\right)^2 + \left(\frac{x}{2} + x^2\varepsilon_4(x)\right)^2\varepsilon_5(x)\right) \\
&= \sqrt{2}\left(1 + \frac{x}{4} - \frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{4} + x^2\varepsilon_6(x)\right) + x^2\varepsilon_7(x)\right) \\
&= \sqrt{2} + \frac{x}{2\sqrt{2}} - \frac{x^2}{16\sqrt{2}} + x^2\varepsilon_8(x)
\end{aligned} \tag{2}$$

(b) On cherche un DL à l'ordre 2 en 0 de $\ln\left(\frac{e^x}{2} + \sin(x)\right)$: il faut un DL à l'ordre 2 de $\frac{e^x}{2} + \sin(x)$.

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{e^x}{2} + \sin(x)\right) &= \ln\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + x^2\varepsilon_1(x)\right) + \left(x + x^2\varepsilon_2(x)\right)\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{x^2}{4} + x^2\varepsilon_3(x)\right)
\end{aligned} \tag{3}$$

On connait le DL de $\ln(1+u)$ avec $u \to 0$, il faut donc se ramener à ce cas. On met donc $\frac{1}{2}$ en facteur dans le logarithme et on utilise la formule $\ln(ab) = \ln a + \ln b$:

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{e^x}{2} + \sin(x)\right) &= \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{x^2}{4} + x^2\varepsilon_3(x)\right) = \ln\frac{1}{2}\left(1 + 3x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_4(x)\right) \\
&= \ln(\frac{1}{2}) + \ln\left(1 + 3x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_4(x)\right) \\
&= -\ln(2) + \left(3x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_4(x)\right) - \frac{1}{2}\left(3x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_4(x)\right)^2 + \left(3x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_4(x)\right)^2\varepsilon_5(x) \\
&= -\ln(2) + 3x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\left(9x^2 + x^2\varepsilon_6(x)\right) + x^2\varepsilon_7(x) \\
&= -\ln(2) + 3x - 4x^2 + x^2\varepsilon_8(x)
\end{aligned} \tag{4}$$

Quotient de DL

Exercice 10. Déterminer le développement limité de $f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$ à l'ordre 2 en calculant le développement limité de $\dfrac{1}{x+2}$ et en multipliant par $x+3$.

Indications. On peut éventuellement simplifier les calculs en remarquant que $\frac{x+3}{x+2} = 1 + \frac{1}{x+2}$...

Solution. On se ramène à la forme connue $\frac{1}{1+u}$ avec $u \to 0$.

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + x^2\varepsilon_1(x)\right) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon_2(x) \tag{5}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{x+2} &= (x+3)\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon_2(x)\right)\\ &= x\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon_2(x)\right) + 3\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon_2(x)\right)\\ &= \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2} - \frac{3x}{4} + \frac{3x^2}{8} + x^2\varepsilon_3(x)\\ &= \frac{3}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon_3(x)\end{aligned} \tag{6}$$

Exercice 11. Calculez le développement limité à l'ordre 2 quand $x \to 0$ des fonctions suivantes :

(a) $\dfrac{e^x}{\cos(x)}$ (b) $\dfrac{1}{1-\sin(x)}$ (c) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+2x}}$

Indications. (c) Utiliser le DL $(1+u)^\alpha$.

Solution. (a) Développons à l'ordre 2 :

$$\frac{e^x}{\cos(x)} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x)}{1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_2(x)} \tag{7}$$

On a une forme en $\frac{1}{1-u}$ avec $u \to 0$, mais ici le terme correspondant à u est en x^2, donc il suffit d'utiliser $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u\varepsilon(u)$ pour avoir la précision en x^2 voulue.

$$\begin{aligned}\frac{e^x}{\cos(x)} &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_3(x)\right)\\ &= \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_4(x)\\ &= 1 + x + x^2 + x^2\varepsilon_4(x)\end{aligned} \tag{8}$$

(b) On a $\sin(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$, donc on peut utiliser le DL $\frac{1}{1-u}$ avec $u \to 0$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\sin(x)} &= \frac{1}{1 - x + x^2\varepsilon_1(x)}\\ &= 1 + (x + x^2\varepsilon_1(x)) + (x + x^2\varepsilon_1(x))^2 + (x + x^2\varepsilon_1(x))^2\varepsilon_2(x)\\ &= 1 + x + x^2 + x^2\varepsilon_3(x)\end{aligned} \tag{9}$$

(c) On a $\frac{e^x}{\sqrt{1+2x}} = e^x(1+2x)^{-1/2}$. On utilise donc le DL à l'ordre 2 de $(1+u)^\alpha$ avec $u \to 0$ et $\alpha = -1/2$.

$$\begin{aligned}\frac{e^x}{\sqrt{1+2x}} &= e^x(1+2x)^{-1/2}\\ &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x)\right)\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)2x + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - 1\right)\frac{(2x)^2}{2} + x^2\varepsilon_2(x)\right)\\ &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x)\right)\left(1 - x + \frac{3x^2}{2} + x^2\varepsilon_2(x)\right)\\ &= \left(1 - x + \frac{3x^2}{2}\right) + x(1-x) + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_3(x)\\ &= 1 + x^2 + x^2\varepsilon_3(x)\end{aligned} \tag{10}$$

Exercice 12 (attention !)**.** Calculez le développement limité à l'ordre 2 quand $x \to 0$ de

$$f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{\sin(2x)}.$$

Indications. Attention : si on simplifie par x dans le quotient de 2 DLs, le terme de reste en $x^n\varepsilon(x)$ devient $x^{n-1}\varepsilon(x)$: on perd un ordre ! !

Solution. Dans la fraction $\frac{\ln(1+2x)}{\sin(2x)}$ le dénominateur tend vers 0 quand x tend vers 0. Pour se ramener à la forme $\frac{1}{1+u}$ avec $u \to 0$, il faut mettre le terme en x en facteur pour avoir un 1er terme de DL constant. Ce procédé fait perdre un ordre en précision, ce qui demande de pousser le DL à l'ordre 3 au numérateur et au dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+2x)}{\sin(2x)} &= \frac{2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} + x^3\varepsilon_1(x)}{2x - \frac{(2x)^3}{6} + x^3\varepsilon_2(x)} \\ &= \frac{2x\left(1 - \frac{2x}{2} + \frac{(2x)^2}{3} + x^2\varepsilon_3(x)\right)}{2x\left(1 - \frac{(2x)^2}{6} + x^2\varepsilon_4(x)\right)} \\ &= \frac{1 - x + \frac{4x^2}{3} + x^2\varepsilon_3(x)}{1 - \frac{2x^2}{3} + x^2\varepsilon_4(x)}\end{aligned} \tag{11}$$

On a une forme en $\frac{1}{1-u}$ avec $u \to 0$, mais ici le terme correspondant à u est en x^2, donc il suffit d'utiliser $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u\varepsilon(u)$ pour avoir la précision en x^2 voulue.

$$\begin{aligned}&\frac{\ln(1+2x)}{\sin(2x)} = \left(1 - x + \frac{4x^2}{3} + x^2\varepsilon_3(x)\right)\left(1 + \frac{2x^2}{3} + x^2\varepsilon_5(x)\right) \\ &= \left(1 + \frac{2x^2}{3}\right) - x + \frac{4x^2}{3} + x^2\varepsilon_6(x) \\ &= 1 - x + 2x^2 + x^2\varepsilon_6(x)\end{aligned} \tag{12}$$

Formules de Taylor-Young (complément)

Exercice 13. (a) Utiliser la formule de Taylor-Young pour écrire le développement limité à l'ordre 4 quand $x \to 0$ de $(1+x)^\alpha$.

(b) En déduire le développement limité à l'ordre 3 quand $x \to 0$ de $\sqrt{1+x}$.

Indications. Comme on cherche un développement limité à l'ordre 4 avec la formule de Taylor, il faut calculer les expressions des dérivées jusqu'à l'ordre 4 de $(1+x)^\alpha$

Solution. (a) Si on note $f(x) = (1+x)^\alpha$, un calcul donne $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$, $f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$, et $f^{(4)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(1+x)^{\alpha-4}$. Au point 0 on obtient donc $f(0) = 1$, $f'(0) = \alpha$, $f''(0) = \alpha(\alpha-1)$, $f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$ et $f^{(4)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)$. On obtient alors le développement limité suivant

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)x^2 + \frac{1}{3!}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3 + \frac{1}{4!}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)x^4 + x^4\varepsilon(x)$$

(b) En appliquant la formule précédente on a

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2^3}x^2 + \frac{1}{2^4}x^3 + x^3\varepsilon(x).$$

Exercice 14. Utiliser la formule de Taylor-Young en $\frac{\pi}{4}$ pour écrire le développement limité à l'ordre 2 quand $x \to \frac{\pi}{4}$ de $\sin(x)$.

Indications. On applique la même méthode que celle utilisée dans l'exercice précdent.

Solution. Si on pose $f(x) = \sin(x)$ alors on sait $f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -\sin(x)$. Au point $\pi/4$ on a $f(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$, $f'(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ et $f''(\pi/4) = -1/\sqrt{2}$. On obtient alors le développement limité suivant

$$\sin(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4})^2 + (x - \frac{\pi}{4})^2\varepsilon(x - \frac{\pi}{4})$$

Faire bien attention que le développement s'exprime en fonction de $(x - \pi/4)$.

Primitive d'un développement limité (complément)

Exercice 15.

(a) Déterminer le développement limité à l'ordre 6 quand $x \to 0$ de la fonction $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

(b) En se rappelant que la dérivée de $\arctan(x)$ est $\dfrac{1}{1+x^2}$, déduire un développement limité à l'ordre 7 quand $x \to 0$ de $\arctan(x)$

Indications. (a). On utilise le DL de $frac11 + x$ ou on applique la formule du développement limité de $(1+x^2)^\alpha$ avec $\alpha = -1$.

(b). On utilise que le DL d'une primitive est une primitive du DL.

Solution. (a) Avec l'expression obtenue dans l'exercice 13, on en déduit

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^6\varepsilon(x)$$

(b) Pour répondre à cette question, on calcule une primitive de la partie principale du développement limité de $1/(1+x^2)$ sans oublier que la constante d'intégration est déterminée par la valeur de la fonction arctan en 0. Ce qui nous donne finalement

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + x^7\varepsilon(x)$$

Limites en 0

Exercice 16. À l'aide de développements limités, déterminer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x + x^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2 + x^3}$

Indications. Comment connaître l'ordre où il faut développer le numérateur ? L'important est qu'après simplifications, il y ait au moins un terme non nul dans le DL au numérateur et au dénominateur.

Solution. (a) L'expression $x+x^2$ s'écrit $x(1+x)$, donc 0 est un zéro d'ordre 1 pour la fonction $x \longrightarrow x+x^2$. On développe donc le numérateur à l'ordre 1. Cela donne $\cos(x) - 1 = 1 + x\varepsilon(x) - 1 = x\varepsilon(x)$, et on a

$$\frac{\cos(x) - 1}{x + x^2} = \frac{x\varepsilon(x)}{x(1+x)} = \frac{\varepsilon(x)}{1+x}.$$

Donc la limite est 0.

(b) On procéde de manière identique. Comme $x^2 + x^3 = x^2(1+x)$, 0 est un zéro d'ordre 2, on développe donc le numérateur à l'ordre 2, soit $e^x - 1 - x = 1 + x + x^2/2 + x^2\varepsilon(x) - 1 - x = x^2/2 + x^2\varepsilon(x)$, d'où

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2 + x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2/2 + x^2\varepsilon(x)}{x^2(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1/2 + \varepsilon(x)}{1+x} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 17. Utiliser les développements limités pour calculer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{1-\sqrt{1-3x}}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-\tan(x)}{x^2+x^3}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{e^x-\cos(x)}{\sin(x)-\ln(1+x)}$

Indications. Même indication que pour l'exercice précédent.

Solution.

(a) Comme $\sin(0)=0$ et $1-\sqrt{1-3\cdot 0}=0$, nous avons une forme indeterminée $\frac{0}{0}$.
Nous connaissons déja le DL de $\sin(u)$ en 0 :

$$\sin(u)=\frac{u}{1!}-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}+u^{2n+1}\varepsilon(u)$$

avec $\varepsilon(u)\to 0$ lorsque $u\to 0$. Donc, en substituant $u=2x$,

$$\sin(2x)=2x+\varepsilon_2(x)x \quad \text{où } \lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x)=0.$$

Trouvons le DL de la fonction $f(x)=1-\sqrt{1-3x}$ en 0. On a $f(0)=0$, $f'(x)=-\frac{-3}{2\sqrt{1-3x}}=\frac{3}{2\sqrt{1-3x}}$, d'où $f'(0)=\frac{3}{2}$. Alors le DL de f à l'ordre 1 en 0 est $f(x)=\frac{3}{2}x+\varepsilon_1(x)x$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x)=0$. ([1]).
Alors

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{1-\sqrt{1-3x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+\varepsilon_2(x)x}{\frac{3}{2}x+\varepsilon_1(x)x}=\lim_{x\to 0}\frac{2+\varepsilon_2(x)}{\frac{3}{2}+\varepsilon_1(x)}=\frac{4}{3}$$

(on a simplifié par x dans l'avant-dernière égalité).

(b) On a $\sin(0)-\tan(0)=0$ et $0^2+0^3=0$, nous avons donc une forme indeterminée $\frac{0}{0}$.
Le DL en 0 de $\sin(x)$ à l'ordre 3 est $\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+x^3\varepsilon_1(x)$ avec $\varepsilon_1(x)\to 0$ lorsque $x\to 0$. Le DL en 0 de $\tan(x)$ à l'ordre 3 est $\tan(x)=x+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon_2(x)$ avec $\varepsilon_2(x)\to 0$ lorsque $x\to 0$. Donc

$$\sin(x)-\tan(x)=-\frac{1}{2}x^3+x^3\varepsilon(x) \quad \text{où } \varepsilon(x)=\varepsilon_1(x)-\varepsilon_2(x)\to 0 \text{ lorsque } x\to 0.$$

Alors

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-\tan(x)}{x^2+x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^3/2+x^3\varepsilon(x)}{x^2+x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-x/2+x\varepsilon(x)}{1+x}=0$$

(on a simplifié par x^2 dans l'avant-dernière égalité).

(c) Comme $e^0-\cos(0)=0$ et $\sin(0)-\ln(1+0)=0$, nous avons de nouveau une forme indeterminée $\frac{0}{0}$.
Le DL en 0 de e^x à l'ordre est $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+x^2\varepsilon_1(x)$, $\varepsilon_1(x)\underset{x\to 0}{\to}0$.
Le DL en 0 de $\cos(x)$ à l'ordre 2 est $\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_2(x)$, $\varepsilon_2(x)\underset{x\to 0}{\to}0$.
Le DL en 0 de $\sin(x)$ à l'ordre 3 est $\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+x^3\varepsilon_3(x)$, $\varepsilon_3(x)\underset{x\to 0}{\to}0$
et le DL en 0 de $\ln(1+x)$ à l'ordre 2 est $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_4(x)$, $\varepsilon_4(x)\underset{x\to 0}{\to}0$.
Alors

$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^x-\cos(x)}{\sin(x)-\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0+}\frac{x+x^2+x^2(\varepsilon_1(x)-\varepsilon_2(x))}{x^2/2+x^3/6+x^2(x\varepsilon_3(x)-\varepsilon_4(x))}=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}\cdot\frac{1+x+x(\varepsilon_1(x)-\varepsilon_2(x))}{1/2+x/6+(x\varepsilon_3(x)-\varepsilon_4(x))}$$

Nous avons $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{1+x+x(\varepsilon_1(x)-\varepsilon_2(x))}{1/2+x/6+(x\varepsilon_3(x)-\varepsilon_4(x))}=2$, donc

$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^x-\cos(x)}{\sin(x)-\ln(1+x)}=+\infty.$$

Exercice 18 (Pour aller plus loin)**.**

(a) Calculez le développement limité en 0 à l'ordre 1 de $\dfrac{1}{x}\ln(1+x)$.

(b) En déduire $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

1. On a utilisé ici Taylor-Young à l'ordre 1. On aurait pu aussi utiliser le formulaire pour avoir le DL à l'ordre 1 de $(1+u)^{1/2}=1+u/2+u\varepsilon(u)$ et substituer $u=-3x$

(c) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 1 de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Solution.
(a) Le DL de $\ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 2 est $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$, $\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$. Donc

$$\frac{1}{x}\ln(1+x) = 1 - \frac{x}{2} + x\varepsilon(x)$$

est le développement limité en 0 à l'ordre 1.
Commentaire. Attention : il faut calculer un DL à l'ordre 2 de $\ln(1+x)$ pour pouvoir avoir, après simplification par x un DL à l'ordre 1 de $\frac{1}{x}\ln(1+x)$ (on perd 1 ordre...)

(b) On écrit [2] $(1+x)^{1/x} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$. D'après (a), $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x) = 1$. Comme la fonction e^x est continue sur $\mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^x = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^1 = e$$

(c) On écrit de nouveau $(1+x)^x = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$. D'après (a), $\frac{1}{x}\ln(1+x) = 1 - \frac{x}{2} + x\varepsilon(x)$. Nous connaissons le DL de e^u en 0 à l'ordre 1 : $e^u = 1 + u + \varepsilon_1(u)$, $\varepsilon_1(u) \underset{u\to 0}{\to} 0$. On ne peut pas faire la substitution $u = \frac{1}{x}\ln(1+x)$ car cette quantité tend vers 1 (pas vers 0) quand $x \to 0$.
Par contre, $e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^{1-\frac{x}{2}+x\varepsilon(x)} = e^1 \times e^{-\frac{x}{2}+x\varepsilon(x)}$, et on peut faire la substitution $u = -\frac{x}{2} + x\varepsilon(x)$:

$$e^{-\frac{x}{2}+x\varepsilon(x)} = 1-\frac{x}{2}+x\varepsilon(x)+(-\frac{x}{2}+x\varepsilon(x))\varepsilon_1(-\frac{x}{2}+x\varepsilon(x)) = 1-\frac{x}{2}+x\left[\varepsilon(x)+(-1/2+\varepsilon(x))\varepsilon_1(-\frac{x}{2}+x\varepsilon(x))\right]$$

$$= 1 - \frac{x}{2} + x\varepsilon_2(x)$$

avec $\varepsilon_2(x) = \varepsilon(x) + (-1/2+\varepsilon(x))\varepsilon_1(-\frac{x}{2}+x\varepsilon(x))$, qui vérifie $\varepsilon_2(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$.
Alors

$$e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^1 \times e^{-\frac{x}{2}+x\varepsilon(x)} = e \times (1 - \frac{x}{2} + x\varepsilon_2(x)) = \boxed{e - \frac{e}{2}x + x\varepsilon_3(x)}$$

où $\varepsilon_3(x) = e \cdot \varepsilon_2(x) \to 0$ quand $x \to 0$.

Droite tangente, position de la courbe relativement à la tangente, extremum

Exercice 19. Pour chacune des fonctions suivantes dont on donne le développement limité , déterminer une équation de sa droite tangente en 0 et la position relative de la courbe et de sa droite tangente au voisinage de 0. Dire s'il s'agit d'un extremum local.

$$f_1(x) = \sin(2x) - 2\cos(x) = -2 + 2x + x^2 + x^2\varepsilon(x) \qquad f_2(x) = \ln(1+x) + e^x = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

$$f_3(x) = \sqrt{\cos(x)} = 1 - \frac{1}{4}x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

Indications. Le DL a l'ordre 1 permet d'avoir l'equation de la tangente, et si on a un terme non nul de plus dans un DL d'ordre plus grand, l'étude de son signe permet de déterminer la position de la tangente par rapport à la courbe.

Solution. Pour la fonction f_1, une équation de la droite tangente en 0 est $y = -2 + 2x$ (c'est le DL à l'ordre 1). La fonction f_1 n'a pas d'extremum local en 0 parce que sa tangente n'est pas horizontale. Pour étudier la position du graphe de f par rapport à la tangente, on étudie le signe de la différence près de 0 :

$$f_1(x) - (-2+2x) = x^2 + x^2\varepsilon(x) = x^2(1+\varepsilon(x)).$$

Cette quantité est ≥ 0 pour $|x|$ assez petit car $x^2 \geq 0$ et $(1+\varepsilon(x))$ est proche de 1 pour x proche de 0. Donc le graphe de f est au-dessus de la tangente au voisinage 0.

Pour la fonction f_2, une équation de la tangente en 0 est $y = 1 + 2x$. La fonction f_2 n'a pas d'extremum local en 0 parce que sa tangente n'est pas horizontale. On étudie le signe de la différence de $f_2(x)$ et $y(x)$:

$$f_2(x) - (1+2x) = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^3 + x^3\varepsilon(x) - 1 - 2x = \frac{1}{2}x^3 + x^3\varepsilon(x) = x^3(\frac{1}{2} + \varepsilon(x)).$$

2. On rappelle que la définition de a^b pour $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$ est $a^b = e^{b\ln(a)}$

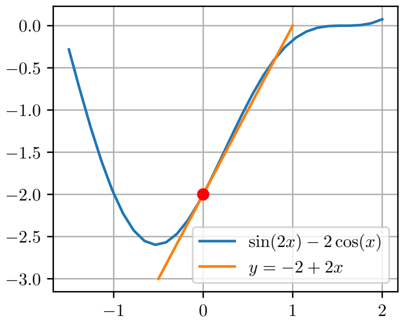
Comme $\varepsilon(x)$ est proche de 0 quand x est proche de 0, l'expression $\frac{1}{2}+\varepsilon(x)$ est positive, en fait elle est proche de $\frac{1}{2}$. L'expression x^3 a le même signe que x. Donc $f_2(x) - y(x) > 0$ pour $x > 0$ proche de 0 et donc le graphe de f_2 est au-dessus de la tangente. Pour $x < 0$ proche de 0 on a $f_2(x) - y(x) < 0$ et donc le graphe de f_2 est en dessous de la tangente.

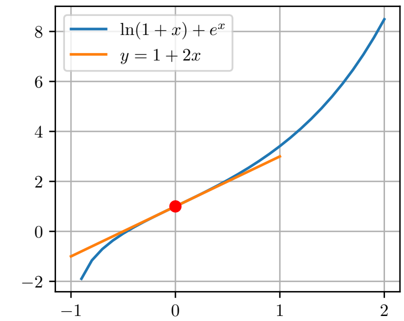
Pour la fonction f_3, $y = 1$ est une équation de la tangente en 0. En particulier, la tangente est horizontale, donc f pourrait avoir un extremum local en 0, mais pour l'instant, on ne sait pas.

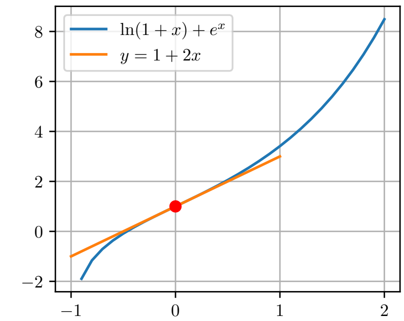
Pour étudier la position du graphe de f par rapport à la tangente, on étudie le signe de la différence, pour x près de 0 :

$$f_3(x) - 1 = -\frac{1}{4}x^2 + x^2\varepsilon(x) = x^2(-\frac{1}{4} + \varepsilon(x))$$

L'expression $-\frac{1}{4} + \varepsilon(x)$ est près de $-\frac{1}{4}$ quand $|x|$ est assez petit, et $x^2 \geq 0$, on conclut que $f_3(x) - 1 \leq 0$ pour $|x|$ proche de 0, et donc que le graphe de f_3 est en dessous de la tangente en 0. Alors ca signifie que $f_3(x) \leq f_3(0)$ pour tout x proche de 0 et donc f_3 a un maximum local en $x = 0$.







Asymptotes en ∞

Exercice 20. On considère la fonction

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x}{x^2 - x + 1}$$

— Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de $hf(\frac{1}{h})$ lorsque $h \to 0$, $h > 0$.
— En posant $h = \frac{1}{x}$, en déduire l'equation de la droite asymptote au graphe de f en $+\infty$.
— Quelle est la position du graphe de f par rapport à l'asymptote ?

Solution. Déterminons le développement limité de $hf(\frac{1}{h})$, mais on simplifie d'abord

$$hf(\frac{1}{h}) = h\frac{\frac{1}{h^3} + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h}}{\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h} + 1} = \frac{1 + h + h^2}{1 - h + h^2} = (1 + h + h^2)\frac{1}{1 - (h - h^2)}.$$

En utilisant le développement limité de $\frac{1}{1-x}$ en 0, (on remarque que $h - h^2 \to 0$ quand $h \to 0$) on obtient

$$\frac{1}{1 - (h - h^2)} = 1 + (h - h^2) + (h - h^2)^2 + (h - h^2)^2\varepsilon(h - h^2) = 1 + h + h^2\varepsilon_1(h)$$

où $\varepsilon_1(h) \to 0$ quand $h \to 0$. Alors

$$(1 + h + h^2)\frac{1}{1 - (h - h^2)} = (1 + h + h^2)(1 + h) + (1 + h + h^2)h^2\varepsilon_1(h) = 1 + 2h + 2h^2 + \varepsilon_2(h)$$

où $\varepsilon_2(h) \to 0$ quand $h \to 0$. Conclusion :

$$hf(\frac{1}{h}) = 1 + 2h + 2h^2 + \varepsilon_2(h).$$

On pose maintenant $h = \frac{1}{x}$, alors

$$\frac{1}{x}f(x) = 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon_2(\frac{1}{x})$$

soit

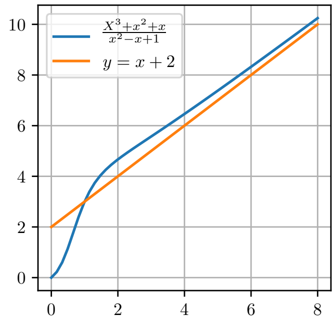
$$f(x) = x\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon_2(\frac{1}{x})\right) = x + 2 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon_2(\frac{1}{x})$$

et donc la droite $y = x + 2$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$ puisque la différence $f(x) - (x + 2)$ est égale à $\frac{2}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon_2(\frac{1}{x})$ qui tend vers 0 quand $x \to +\infty$.

Etudions maintenant le signe de la différence $f(x) - y(x)$ quand $x > 0$ est très grand :

$$f(x) - y(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon_2\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}(2 + \varepsilon_2(\frac{1}{x})).$$

Comme $\varepsilon_2(1/x)$ est proche de 0 pour x assez grand, le terme $2 + \varepsilon_2(\frac{1}{x})$ est proche de 2 donc positif, et on conclut que $f(x) - y(x) > 0$ pour x assez grand, donc le graphe de f est au-dessus de la droite d'équation $y = x + 2$.



Exercice 21. Soit $f(x) = x\sin(\dfrac{1}{x})$. En étudiant $hf(\frac{1}{h})$ lorsque $h \to 0$, trouver l'équation de la droite asymptote au graphe de f au voisinage de $+\infty$, et déterminer la position du graphe de f par rapport a l'asymptote.

Indications. Attention, il faut un DL à l'ordre 3 ici pour avoir la position relative du graphe par rapport à l'asymptote.

Solution. Soit $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ (voir le graphe ci-dessous). Posons $h = \frac{1}{x}$ de sorte que lorsque $x \to \infty$, $h \to 0$. On a alors

$$hf(\frac{1}{h}) = h \times \frac{1}{h}\sin(h) = \sin(h) = h - \frac{1}{6}h^3 + h^3\varepsilon(h)$$

avec $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$. On a donc en substituant $h = \frac{1}{x}$,

$$\frac{1}{x}f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon(\frac{1}{x})$$

donc en multipliant par x,

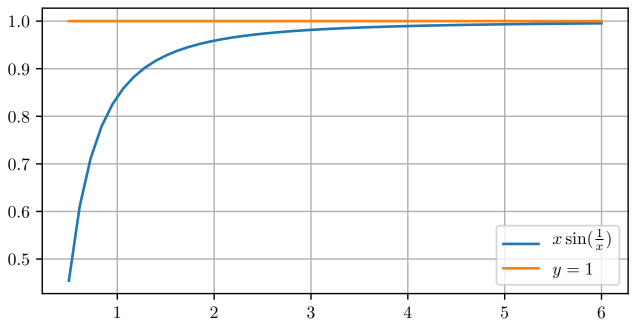
$$f(x) = 1 - \frac{1}{6}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(\frac{1}{x}) \quad \text{avec} \lim_{x\to+\infty}\varepsilon(\frac{1}{x}) = 0.$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, et la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale au graphe de f en $+\infty$.

Pour étudier la position du graphe par rapport à l'asymptote, on étudie le signe de la différence :

$$f(x) - 1 = \frac{1}{x^2}(-\frac{1}{6} + \varepsilon(\frac{1}{x}))$$

Le terme entre parenthèses est proche de $-\frac{1}{6}$ quand $x \to +\infty$, donc négatif. Comme $x^2 > 0$ pour $x > 0$, on a que $f(x) - 1$ est négatif pour pour x grand, donc la courbe est sous l'asymptote au voisinage de $+\infty$.



Exercice 22. Soit $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+1}$

(a) Déterminer le développement limité en à l'ordre 2 de $hf(\frac{1}{h})$quand $h \to 0$ par valeurs positives.

(b) En déduire l'équation de l'asymptote oblique de f en $+\infty$.

(c) Déterminer la position relative de la courbe de f par rapport à cette asymptote.

(d) Mêmes questions en $-\infty$.

Solution.

(a)
$$hf(\frac{1}{h}) = h \times e^h\sqrt{\frac{1}{h^2}+1} = he^h\sqrt{\frac{1}{h^2}+1} = he^h\sqrt{\frac{1+h^2}{h^2}} = \frac{h}{|h|}e^h\sqrt{1+h^2}$$

Lorsque $h > 0$, $\frac{h}{|h|} = 1$. Puis on détermine les DLs à l'ordre 2 :

$$e^h = 1 + h + frac12h^2 + h^2\varepsilon(h)$$

$$\sqrt{1+h^2} = 1 + \frac{1}{2}h^2 + h^2\varepsilon(h)$$

donc

$$hf(\frac{1}{h}) = 1 + h + h^2 + h^2\varepsilon(h).$$

(b) Posons $h = \frac{1}{x}$. Quand $x \to +\infty$, $h \to 0$ par valeurs positives. On a donc

$$\frac{f(x)}{x} = hf(\frac{1}{h}) = 1 + h + h^2 + h^2\varepsilon(h)$$

$$= 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(\frac{1}{x}) \quad \text{avec} \lim_{x\to+\infty} \varepsilon(\frac{1}{x}) = 0.$$

Donc en multipliant par x,

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x}).$$

En particulier,

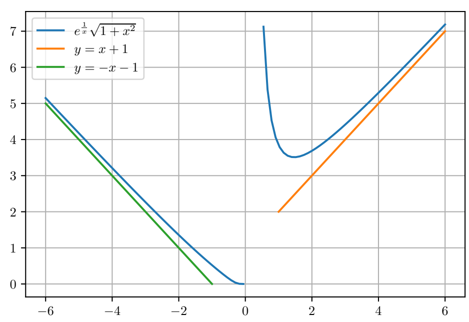
$$f(x) - (x+1) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x}) \xrightarrow{x\to+\infty} 0$$

donc la droite d'équation $\boxed{y = x+1}$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$.

(c) On étudie le signe de la différence $f(x) - (x+1)$:

$$f(x) - (x+1) = \frac{1}{x}(1 + \varepsilon(\frac{1}{x}))$$

lorsque $x \to +\infty$, $1 + \varepsilon(\frac{1}{x}) \to 1$, donc est positif pour x assez grand. $\frac{1}{x}$ est aussi positif pour x assez grand, donc le signe de $f(x) - (x+1)$ est positif pour x assez grand : la courbe est au-dessus de l'asymptote au voisinage de $+\infty$.



(d) Les calculs en $-\infty$ sont similaires, sauf que pour $h < 0$, $\frac{h}{|h|} = -1$. Comme au-dessus, on a que

$$hf(\frac{1}{h}) = \frac{h}{|h|}e^h\sqrt{1+h^2} = \frac{h}{|h|}(1 + h + h^2 + h^2\varepsilon(h))$$

donc lorsque $h \to 0$ par valeurs négatives,

$$hf(\frac{1}{h}) = (-1) \times (1 + h + h^2 + h^2\varepsilon(h)) = -1 - h - h^2 + h^2\varepsilon(h) \quad \text{avec } \varepsilon(h) \xrightarrow{h\to 0} 0$$

On en déduit que

$$f(x) = -x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x}) \quad \text{avec } \varepsilon(\frac{1}{x}) \xrightarrow{x\to -\infty} 0$$

donc que la droite d'équation $\boxed{y = -x - 1}$ est asymptote au graphe de f en $-\infty$
On étudie ensuite le signe de la différence

$$f(x) - (-x - 1) = \frac{1}{x}(-1 + \varepsilon(\frac{1}{x}))$$

Lorsque $x \to +\infty$, $-1 + \varepsilon(\frac{1}{x}) \to -1$, donc est négatif pour x assez petit (proche de $-\infty$). $\frac{1}{x}$ est aussi négative pour x assez petit, donc le signe de $f(x) - (x + 1)$ est positif pour x assez petit : la courbe est au-dessus de l'asymptote au voisinage de $-\infty$.

III Exercices supplémentaires

Vous trouverez les réponses à ces exercices en fin de feuille de TD.

Sommes, produits, quotients, compositions

Exercice 23. Calculez le développement limité en 0 des fonctions suivantes :

(a) $\ln(1 + x) + e^x$, à l'ordre 3 (b) $e^x + e^{-x}$, à l'ordre 3

(c) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, à l'ordre 3

Exercice 24. Calculer le développement limité de $f(x) + g(x)$ à l'ordre maximum possible au voisinage de 0, sachant que : $f(x) = 2 + x - x^2 + 2x^3 + x^3\varepsilon_1(x)$, $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ et $g(x) = 1 - 3x + 2x^2 + x^2\varepsilon_2(x)$, $\lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$.

Exercice 25. Calculez le développement limité en 0 des fonctions suivantes :

(a) $(e^x - e^{-x})\sin(x)$, à l'ordre 3 (b) $\sin(x)\cos(x)$, à l'ordre 3

(c) $\sin^2(x)$, à l'ordre 4

Exercice 26. Calculez le développement limité en 0 des fonctions suivantes :

(a) $(1 + 2x - 2x^2)^{1/2}$, à l'ordre 2 (b) $\sin(\sin(3x))$, à l'ordre 3

(c) $\sqrt{\cos(x)}$, à l'ordre 2 (d) $e^{\sqrt{1+x}}$, à l'ordre 2

Limites, tangentes, et asymptotes

Exercice 27. À l'aide de développements limités , déterminer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{x^2}$(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{\cos(x) - 1}$

Exercice 28. Utiliser des développements limités pour calculer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - \cos(2x)}{\sin^2(x)}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x)} - \cos(x)}{\sin(x)}$ (c) $\lim_{x\to 0} \frac{3\tan x - 3x}{x^3 + x^2}$

Exercice 29. Pour chacune des fonctions suivantes dont on donne le développement limité , déterminer une équation de sa droite tangente en 0 et la position relative de la courbe et de sa droite tangente au voisinage de 0. Dire s'il s'agit d'un extremum.

$f_1(x) = \sqrt{1 + 2x - 2x^2} = 1 + x - \frac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ $f_2(x) = \sin(x)(e^x - e^{-x}) = 2x^2 + x^2\varepsilon(x)$

$f_3(x) = 3\tan x - 3x = x^3 + x^3\varepsilon(x)$ $f_4(x) = 1 - x^4 + x^4\varepsilon(x)$

Exercice 30. (a) Utiliser la formule de Taylor-Young pour écrire le développement limité d'ordre 2 en 1 de $f(x) = \arctan(x)$.

(b) En déduire une équation de la droite tangente en 1 à la courbe de f ainsi que la position relative de la courbe et la tangente.

Exercice 31. Soit $f(x) = x\ln(1+\frac{1}{x})$.

En calculant un développement limité à l'ordre 2 de $f(\frac{1}{h})$ quand $h \to 0$, déterminer l'équation de l'asymptote de f en $+\infty$, et la position du graphe de f par rapport a l'asymptote au voisinage de $+\infty$.

(Complément) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x$.

Exercice 32. Soit $f(x) = \sqrt{x^2+4x+2}$

(a) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $hf(\frac{1}{h})$.

(b) Déduire l'équation de l'asymptote oblique de f en $+\infty$ et la position relative de la courbe de f et l'asymptote.

(c) Même questions en $-\infty$.

IV Réponses aux tests et exercices supplémentaires

Réponse au test 1. (a) $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon_2(x)$, $\quad \lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$

(b) $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon_3(x)$, $\quad \lim_{x\to 0}\varepsilon_3(x) = 0$

Réponse au test 2. $P(x) = -3+5x^2+x^2(-2x+x^2) = -3+5x^2+x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

Réponse au test 3. On peut tout simplement prendre $f(x) = 7+13x-24x^2$.

Réponse au test 4.

(a) $-\ln(1+x) = -x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+x^3\varepsilon(x)$.
Le DL de $\ln(1+u)$ avec $u=-x$ donne $\ln(1-x) = -x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+x^3\varepsilon(x)$.

(b) $2\cos(x) = 2-x^2+x^3\varepsilon(x)$.
$\cos(2x) = 1-2x^2+x^3\varepsilon(x)$.

Réponse au test 5. (a) Utiliser le DL de $(1+u)^\alpha$ avec $\alpha = 1/3$ et $u = 3x$. On trouve $1+x-x^2+x^2\varepsilon(x)$.

(b) Utiliser le DL de $(1+u)^\alpha$ (l'ordre 2 suffit !) avec $\alpha = 1/4$ et $u = x^2$. On trouve $1+\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{32}x^4+x^4\varepsilon(x)$.

Réponse au test 6. $f(x^3) = 1+(x^3)-(x^3)^2+(x^3)^2\varepsilon(x^3) = 1+x^3-x^6+x^6\varepsilon_1(x)$.

Réponse au test 7. $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x} = \dfrac{x-x^2/2+x^2\varepsilon_1(x)}{x+x^2\varepsilon_2(x)} = \dfrac{\cancel{x}(1-x/2+x\varepsilon_1(x))}{\cancel{x}(1+x\varepsilon_2(x))} \xrightarrow{x\to 0} \dfrac{1}{1} = 1$

Réponse à l'exercice 23. (a) $\ln(1+x)+e^x = 1+2x+\frac{1}{2}x^3+x^3\varepsilon(x)$. (b) $e^x+e^{-x} = 2+x^2+x^3\varepsilon(x)$. (c) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x)-\ln(1-x) = 2x+\frac{2}{3}x^3+x^3\varepsilon(x)$.

Réponse à l'exercice 24. On ne connait que le DL à l'ordre 2 de g en 0, donc on ne peut déterminer que le DL à l'ordre 2 de $f+g$. On a $f(x) = 2+x-x^2+x^2\varepsilon_3(x)$, donc $(f+g)(x) = 3-2x+x^2+x^2\varepsilon_4(x)$.

Réponse à l'exercice 25. (a) $(e^x-e^{-x})\sin(x) = 2x^2+x^3\varepsilon(x)$. (b) $\sin(x)\cos(x) = (x-\frac{1}{6}x^3)(1-\frac{1}{2}x^2)+x^3\varepsilon(x)) = x-\frac{2}{3}x^3+x^3\varepsilon(x)$. (c) $\sin^2(x) = x^2-\frac{1}{3}x^4+x^4\varepsilon(x)$.

Réponse à l'exercice 26. (a) $\sqrt{1+2x-2x^2} = 1+x-\frac{3}{2}x^2+x^2\varepsilon(x)$ (b) $\sin(\sin(3x)) = 3x-9x^3+x^3\varepsilon(x)$ (c) $\sqrt{\cos(x)} = \sqrt{1-\frac{1}{2}x^2+x^2\varepsilon(x)} = 1-\frac{1}{4}x^2+x^2\varepsilon(x)$. (d) $e^{\sqrt{1+x}} = e+\frac{e}{2}x+x^2\varepsilon(x)$.

Réponse à l'exercice 27. (a) $+\infty$. (b) 1

Réponse à l'exercice 28. (a) $\dfrac{\cos(x)-\cos(2x)}{\sin^2(x)} = \dfrac{x^2(\frac{3}{2}+\varepsilon(x))}{x^2(1+\varepsilon(x))} \to \dfrac{3}{2}$.

(b) $\dfrac{e^{\sin(x)}-\cos(x)}{\sin(x)} = \dfrac{x(1+\varepsilon_1(x))}{x(1+\varepsilon_2(x))} = \dfrac{1+\varepsilon_1(x)}{1+\varepsilon_2(x)} \to 1$.

(c) $\dfrac{3\tan x - 3x}{x^3+x^2} = \dfrac{x^3(1+\varepsilon(x))}{x^2(1+x)} = x\dfrac{1+\varepsilon(x)}{1+x} \to 0$.

Réponse à l'exercice 29. *Avertissement. On ne connait que le comportement de $\varepsilon(x)$ proche de 0, donc on peut étudier la position relative de la courbe et de sa tangente que proche de 0.*

(a) équation de la tangente : $y_1 = 1+x$; la courbe est en dessous de y_1 proche de 0.

(b) équation de la tangente : $y_2 = 0$; la courbe est au-dessus ; on a un minimum local en 0.

(c) équation de la tangente : $y_3 = 0$; la courbe est au-dessus de la tangente si $x > 0$ et en dessous si $x < 0$ (proche de 0) ; ce n'est pas un extremum.

(d) équation de la tangente : $y_4 = 1$; la courbe est en dessous ; on a un maximum local en 0.

Réponse à l'exercice 30. $\arctan(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x-1)$, $\lim\limits_{x\to 1}\varepsilon(x-1) = 0$.

L'équation de la tangente est donc $y = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1)$. La courbe est en dessous de sa tangente au voisinage de 1.

Réponse à l'exercice 31. $f(\frac{1}{h}) = \frac{1}{h}\ln(1+h) = \frac{1}{h}(h-\frac{1}{2}h^2+h^2\varepsilon(h)) = 1-\frac{1}{2}h+h\varepsilon(h)$, où $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$. Donc en posant $h = \frac{1}{x}$, on a $f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})$, où $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon(\frac{1}{x}) = 0$. On en déduit $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ donc $y = 1$ est asymptote horizontale en $+\infty$. De plus, $f(x) - 1 = \frac{1}{x}(-\frac{1}{2} + \varepsilon(\frac{1}{x})) < 0$ pour x suffisamment grand.

On en déduit que $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{f(x)} \to e^1 = e$.

Réponse à l'exercice 32. (a) $hf(1/h) = 1 + 2h - h^2 + \dfrac{1}{h^2}\varepsilon(h)$.

(b) $f(x) = x + 2 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x}\varepsilon(\dfrac{1}{x}))$. $y = x+2$ est asymptote oblique en $+\infty$ et la courbe est en-dessous de l'asymptote.

(c) Si $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x$. Donc $f(x) = -x - 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x}))$. $y = -x-2$ est asymptote et la courbe est encore en-dessous de l'asymptote.