Feuille d'exercices 2. Algèbre linéaire

I Tests de compréhension

Les tests sont à faire pour vérifier que vous comprenez le cours, les réponses se trouvent en fin de feuille de TD.

Test 1. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x-y+3z=2$. On a aussi une représentation paramétrique

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} | t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Est-ce que $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{P}$? Quelle est la représentation (cartésienne ou paramétrique) la plus pratique pour répondre à la question ?

Trouver un point de $\mathcal{P}$. Trouver 2 autres points de $\mathcal{P}$ de sorte que ces 3 points soient non alignés. Quelle est la représentation (cartésienne ou paramétrique) la plus pratique pour répondre à ces questions ?

Test 2. Calculer la combinaison lineaire $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$.

Ecrire le vecteur $\begin{bmatrix} 1-t_1-2t_2 \\ 2-t_1-3t_2 \\ 3-t_1-4t_2 \end{bmatrix}$ sous la forme $\vec{u}+t_1\vec{v}+\vec{t_2}\vec{w}$.

Test 3. Les matrices suivantes sont elles échelonnées ?

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Test 4. Les systèmes suivants sont ils échelonnées ?

$$(a) \begin{cases} x & +y & +2z & =1 \\ & & 0 & =1 \\ & & 0 & =2 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x & +y & +2z & +3t & =1 \\ & y & & & =1 \\ & & & 0 & =2 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x & +y & +2z & +3t & =1 \\ & & z & +t & =1 \\ & y & & & =2 \end{cases}$$

Test 5. Ecrire le vecteur $\begin{bmatrix} x+2y+3z \\ x-y-z \\ 2x-3y+z \end{bmatrix}$ sous la forme $A.\vec{v}$ pour une certaine matrice A et $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

II Exercices

Droites, plans, et systèmes linéaires

Exercice 1. (a) Ecrire sous forme paramétrique le plan de l'espace donné par l'équation

$$\mathcal{P} : \qquad 2x-3y+4z=6$$

En déduire un point et une paire de vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$.

(b) Même questions pour le plan

$$\mathcal{P}' : \qquad 2x-3y+4z=0$$

Comparer avec la question précédente.

Indications. L'équation $2x - 3y + 4z = 6$ est un système échelonné !!! (1 équation, 3 inconnues). Quelle est la variable pivot ? Quelles sont les variables libres ? Assigner des paramètres aux variables libres, et exprimer la variable pivot en fonction des paramètres.

Solution. (a) L'équation $2x - 3y + 4z = 6$ est un système échelonné avec x comme variable pivot, et y, z comme variables libres. On exprime donc x en fonction de y, z : $x = 3 + \frac{3}{2}y - 2z$ (c'est la méthode de la remontée, dans un cas très simple !). En posant $y = t_1$, $z = t_2$, les solutions s'expriment donc en fonction des paramètres t_1 et t_2 :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + \frac{3}{2}t_1 - 2t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Autrement dit,

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

c'est une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$. Le point $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ est un point du plan, et les vecteurs $\vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$.

(b) On exprime à nouveau x en fonction des variables libres y, z : $x = \frac{3}{2}y - 2z$. En posant $y = t_1$, $z = t_2$, les solutions s'expriment donc en fonction des paramètres t_1 et t_2 :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}t_1 - 2t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et

$$\mathcal{P}' = \left\{ t_1 \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

c'est une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}'$. Le point $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ est un point du plan, et $\vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs de $\mathcal{P}'$.

L'équation dont on est partie est homogène, donc on savait à l'avance que $\mathcal{P}'$ passait par l'origine. Comme les équations des questions (a) et (b) ne diffèrent que par leur second membre, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, ce qui est conforme au fait qu'on a trouvé la même paire de vecteurs directeurs.

Exercice 2. Considerons le plan

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} | t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

(a) Est-ce que $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{P}$?

(b) Donner une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

(c) Est-ce que $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{P}$? (utiliser la question précédente)

Indications. (a) On se demande s'il existe t_1, t_2 tel que $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. On a donc un système de 3 équations à 2 inconnues (t_1 et t_2) et on veut savoir s'il a une solution. L'algorithme du pivot permet de répondre à cette question.

(b) Faire comme dans la question (a) en remplaçant $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ par un vecteur $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ quelconque. Attention : les inconnues sont toujours t_1, t_2, et x, y, z sont des paramètres ici.

Solution. Le point $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ appartient à $\mathcal{P}$ s'il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. On a donc un système de 3 équations à 2 inconnues (t_1 et t_2) et on veut savoir s'il a une solution :

$$\begin{cases} 0 & = 0 + t_1 + 2t_2 \\ 2 & = -1 + 2t_1 + t_2 \\ -1 & = 1 - t_1 + t_2 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} t_1 & +2t_2 & = 0 \\ 2t_1 & +t_2 & = 3 \\ -t_1 & +t_2 & = -2 \end{cases}$$

L'algorithme du pivot permet de répondre à cette question.

$$\begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{matrix} \begin{cases} t_1 & +2t_2 & = 0 \\ & -3t_2 & = 3 \\ & 3t_2 & = -2 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix} \begin{cases} t_1 & +2t_2 & = 0 \\ & -3t_2 & = 3 \\ & 0 & = 1 \end{cases}$$

Notre système est échelonné. Il n'a pas de solution à cause de l'équation impossible $0 = 1$.

Cela signifie donc qu'on ne peut pas trouver t_1, t_2 comme ci-dessus, et donc que le point $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ n'appartient pas à $\mathcal{P}$.

(b) On se donne un point $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, et on sait qu'il appartient à $\mathcal{P}$ s'il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

On se demande donc à quelle condition sur x, y, z le système suivant, d'inconnues t_1, t_2, admet une solution :

$$\begin{cases} x & = 0 + t_1 + 2t_2 \\ y & = -1 + 2t_1 + t_2 \\ z & = 1 - t_1 + t_2 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} t_1 & +2t_2 & = & x & & & \\ 2t_1 & +t_2 & = & & y & & +1 \\ -t_1 & +t_2 & = & & & z & -1 \end{cases}$$

(on écrit les x,y,z en colonne par commodité). L'algorithme du pivot permet de répondre à cette question :

$$\begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{matrix} \begin{cases} t_1 & +2t_2 & = & x & & & \\ & -3t_2 & = & -2x & +y & & +1 \\ & 3t_2 & = & x & & +z & -1 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix} \begin{cases} t_1 & +2t_2 & = & x & & & \\ & -3t_2 & = & -2x & +y & & +1 \\ & 0 & = & -x & +y & +z & \end{cases}$$

Notre système est échelonné. Comme il est échelonné, on sait qu'il a des solutions si et seulement si il n'y a pas d'équation impossible $0 = ...$, donc il a des solutions si et seulement si $-x + y + z = 0$.

On a donc répondu à la question : le système initial a des solutions si et seulement si $-x + y + z = 0$.

Ce qui se traduit par : $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{P}$ si et seulement si $-x + y + z = 0$.

On a donc trouvé une équation cartésienne de $\mathcal{P}$: $\mathcal{P}$ est le plan d'équation $\boxed{-x + y + z = 0}$.

(c) Pour savoir si le point $\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$ appartient à $\mathcal{P}$, on teste si l'équation cartésienne $-x+y+z=0$ est satisfaite : $-3+2+1$ est bien égal à 0 donc $\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$ appartient à $\mathcal{P}$.

Rq : on peut retrouver la question (a) avec l'équation cartésienne : le point $\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix}$ ne satisfait pas l'équation cartésienne puisque $0+2+-1$ n'est pas nul.

Exercice 3. (a) Déterminer l'intersection des deux plans suivants :

$$\begin{array}{lcccccc}\mathcal{P}_1: & x & +2y & -3z & = & 0\\ \mathcal{P}_2: & 2x & -y & +4z & = & 0\end{array}$$

(b) Déterminer l'intersection des trois plans suivants :

$$\begin{array}{lcccccc}\mathcal{P}_1: & x & -y & +3z & = & 1\\ \mathcal{P}_2: & 2x & +y & -z & = & 3\\ \mathcal{P}_3: & x & -4y & +10z & = & 1\end{array}$$

(c) Déterminer l'intersection des trois plans suivants :

$$\begin{array}{lcccccc}\mathcal{P}_1: & 2x & -2y & -z & = & 2\\ \mathcal{P}_2: & x & +2y & +z & = & 1\\ \mathcal{P}_3: & x & +8y & +4z & = & 1\end{array}$$

Si l'intersection n'est pas vide, donner une description géométrique de l'intersection.

Solution.

(a) Déterminer l'intersection des plans revient à résoudre le système linéaire formé par les deux équations des plans. On fait ça en deux étapes : élimination et remontée. On écrit le système sous forme matricielle.

Etape 1 : élimination

$$\left(\begin{array}{rrr|r}1 & 2 & -3 & 0\\ 2 & -1 & 4 & 0\end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \left(\begin{array}{rrr|r}1 & 2 & -3 & 0\\ 0 & -5 & 10 & 0\end{array}\right) L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2 \left(\begin{array}{rrr|r}1 & 2 & -3 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0\end{array}\right)$$

Etape 2 : Remontée. Il y a une seule variable libre : z, on exprime donc les autres variables en fonction de z.
L'équation 2 donne : $-y+2z=0 \Rightarrow y=2z$
L'équation 1 donne : $x=3z-4z=-z$
Les solutions de ce système sont données par :

$$\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x=-z, y=2z\right\} = \left\{z\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix} \mid z\in\mathbb{R}\right\}$$

D'où l'intersection des deux plan est une droite de vecteur directeur $\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$.

(b) Etape 1 : élimination

$$\left(\begin{array}{rrr|r}1 & -1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & -1 & 3\\ 1 & -4 & 10 & 1\end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \left(\begin{array}{rrr|r}1 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 3 & -7 & 1\\ 1 & -4 & 10 & 1\end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \left(\begin{array}{rrr|r}1 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 3 & -7 & 1\\ 0 & -3 & 7 & 0\end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \left(\begin{array}{rrr|r}1 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 3 & -7 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

L'équation $0 = 1$ est impossible. Donc l'ensemble des solutions est vide.

(c)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 4 & 1 \end{array}\right) L_1 \leftrightarrow L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 8 & 4 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -3 & 0 \\ 1 & 8 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \textit{Optionel}\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3} L_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

A l'étape 2 : Remontée. Il y a une seule variable libre : z. On exprime les autres variables en fonction de z.
On obtient de l'équation 2 : $-2y - z = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}z$
On obtient de l'équation 1 : $x + 2y + z = 1 \Rightarrow x = 1$.
Donc l'ensemble des solutions est donné par

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1, y = \frac{-1}{2} z \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-1}{2} z \\ z \end{bmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

L'ensemble des solutions est donc la droite qui passe par le point $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et de vecteur directeur $\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$.

Systèmes linéaires

Exercice 4. (a) Déterminer (sous forme paramétrique) l'ensemble des solutions du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} x & -4y & -z & +w & = & 3 \\ 2x & -8y & +z & -4w & = & 9 \\ -x & +4y & -2z & +5w & = & -6 \end{array} \right.$$

(b) Quel est l'ensemble des solutions du système homogène correspondant ?

(c) Décrire l'ensemble des solutions du système initial comme somme d'une solution particulière et de l'ensemble des solutions du système homogène.

(d) A quelle condition sur a, b, c le système de second membre $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ a-t-il une solution ?

Solution.
(a) Etape 1 : L'élimination.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -8 & 1 & -4 & 9 \\ -1 & 4 & -2 & 5 & -6 \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \\ -1 & 4 & -2 & 5 & -6 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \textit{Optionel} : L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Etape 2 : Remontée : il y a deux variables libres, y et w, on exprime donc les autres variables en fonction de z et w.
L'équation 2 donne : $z - 2w = 1 \Rightarrow z = 1 + 2w$

L'équation 1 donne : $x - 4y - z + w = 3 \Rightarrow x = 3 - w + 4y + 1 + 2w = 4 + 4y + w$
L'ensemble des solutions du système est donné par

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x = 4 + 4y + w, z = 1 + 2w \right\}$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} 4 + 4y + w \\ y \\ 1 + 2w \\ w \end{bmatrix} \mid y, w \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mid y, w \in \mathbb{R} \right\}$$

(b) L'ensemble des solutions du système homogène est donnés par $\left\{ s \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$.

(c) $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ est une solution particulière du système complet. Et donc, l'ensemble de solutions du système initial est donné par

$$\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(d) Suite à l'étape 1 (élimination), on obtient une matrice échelonée qui représente un système échelonné. L'intérêt de ce genre de système, est qu'on peut tout de suite détecter s'il a une solution ou pas en regardant s'il y a des équations impossibles ou pas. Donc, il suffit de vérifier qu'une équation impossible ne figure pas pour guarantir l'existence d'une solution.

On effectue donc l'élimination sur le système avec un second membre $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & -1 & 1 & a \\ 2 & -8 & 1 & -4 & b \\ -1 & 4 & -2 & 5 & c \end{array} \right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -4 & -1 & 1 & a & & \\ 0 & 0 & 3 & -6 & -2a & +b & \\ -1 & 4 & -2 & 5 & c & & \end{array} \right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -4 & -1 & 1 & a & & \\ 0 & 0 & 3 & -6 & -2a & +b & \\ 0 & 0 & -3 & 6 & a & & +c \end{array} \right) \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -4 & -1 & 1 & a & & \\ 0 & 0 & 3 & -6 & -2a & +b & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a & +b & +c \end{array} \right)$$

On est arrivé à un système échelonné. La dernière équation n'est pas une équation impossible si et seulement si $-a + b + c = 0$. Ainsi, le système a des solutions si et seulement si a, b, c satisfont l'équation $-a + b + c = 0$.

Exercice 5. Pour les systèmes suivants, déterminer le nombre de solutions. Déterminer le nombre de solutions et le nombre de variables libres du système homogène associé.

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{rrcr} 2x & +y & = & 7 \\ 3x & +2y & = & 12 \\ 4x & -3y & = & 2 \end{array} \right. \qquad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{rrrcr} x & +y & -z & = & -2 \\ 2x & -y & +z & = & 5 \\ x & +4y & -4z & = & -11 \end{array} \right.$$

Solution.
Pour connaitre le nombre de solutions, il suffit de faire l'étape d'élimination pour arriver à un système échelonné (la remontée est inutile). (a)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 12 \\ 4 & -3 & 2 \end{array} \right) \ L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{array} \right) \ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -12 \end{array} \right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2 \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 27 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

L'équation $0 = 3$ est impossible donc le système n'a pas de solution.

Il n'y a pas de variables libres. Le système homogène associé n'a donc qu'une unique solution (la solution nulle)

(b) On effectue l'élimination

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & -4 & -11 \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & -4 & -11 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \textit{optionel } L_3 \leftarrow \frac{1}{3} L_3 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le système est échelonné. Comme il n'y a pas d'équation impossible, il y a des solutions. Il y a une infinité de solutions car il y a une variable libre : z.

Le système homogène a lui aussi une variable libre et une infinité de solutions.

Exercice 6. A quelle condition sur le second membre les systèmes suivants ont-ils (au moins) une solution ?

$$\text{(a)} \left\{\begin{array}{rrrrl} x & +2y & -z & +t & = a \\ 2x & +7y & +4z & +2t & = b \\ -x & +4y & +13z & -t & = c \end{array}\right. \qquad \text{(b)} \left\{\begin{array}{rrl} x & +3y & = a \\ 3x & -y & = b \\ 2x & +2y & = c \\ x & -4y & = d \end{array}\right. \qquad \text{(c)} \left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & = a \\ x & +y & & = b \\ -x & +y & +2z & = c \end{array}\right.$$

Solution. Comme il s'agit de savoir s'il existe une solution ou non, il suffit de faire l'étape d'élimination, l'étape de remontée est inutile.

(a) On échelonne le système :

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & a \\ 2 & 7 & 4 & 2 & b \\ -1 & 4 & 13 & -1 & c \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & a \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -2a + b \\ -1 & 4 & 13 & -1 & c \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \left(\begin{array}{rrrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & a & & \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -2a & +b & \\ 0 & 6 & 12 & 0 & a & & +c \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \left(\begin{array}{rrrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & a & & \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -2a & +b & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5a & -2b & +c \end{array}\right)$$

Ce système échelonné a des solutions si et seulement si il n'y a pas d'équation impossible, c'est à dire ssi a, b, c vérifient l'équation $c - 2b + 5a = 0$.

(b)

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 3 & a \\ 3 & -1 & b \\ 2 & 2 & c \\ 1 & -4 & d \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 3 & a \\ 0 & -10 & -3a + b \\ 2 & 2 & c \\ 1 & -4 & d \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 3 & a \\ 0 & -10 & -3a + b \\ 0 & -4 & -2a + c \\ 1 & -4 & d \end{array}\right)$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \left(\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 3 & a & & & \\ 0 & -10 & -3a & +b & & \\ 0 & -4 & -2a & & +c & \\ 0 & -7 & -a & & & +d \end{array}\right) L_3 \leftarrow 5L_3 - 2L_2 \left(\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 3 & a & & & \\ 0 & -10 & -3a & +b & & \\ 0 & 0 & -a & -2b & +5c & \\ 0 & -7 & -a & & & +d \end{array}\right)$$

$$L_4 \leftarrow 10L_4 - 7L_2 \left(\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 3 & a & & & \\ 0 & -10 & b - 3a & & & \\ 0 & 0 & -a & -2b & +5c & \\ 0 & 0 & 11a & -7b & & +10d \end{array}\right)$$

Le système est échelonné. Il a donc une solution ssi il n'a pas d'équation impossible, ssi $5c - 2b - 4a = 0$ et $10d - 11a - 7b = 0$.

(c)

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & & b \\ -1 & 1 & 2 & c \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -1 & b - a \\ -1 & 1 & 2 & c \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -1 & b - a \\ 0 & 2 & 3 & c + a \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftrightarrow L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 3 & c+a \\ 0 & 0 & -1 & b-a \end{array}\right)$$

Le système est échelonné, et n'a pas d'équation impossible quelque soit le vecteur $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. Donc il existe une toujours solution.

Exercice 7. Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{rrrrcr} x & +2y & & +2w & = & 0 \\ 2x & +4y & +z & +2w & = & 2 \\ 3x & +5y & -z & +6w & = & -1 \\ 2x & & -7z & +10w & = & -10 \end{array} \right. \qquad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{rrrrcr} 2x & +4y & +z & +2w & = & 4 \\ 2x & +6y & +z & +w & = & 0 \\ x & +3y & +z & +w & = & 1 \\ x & +2y & +z & +2w & = & 4 \end{array} \right.$$

$$\text{(c)} \left\{ \begin{array}{rrrrcr} x & +2y & & +2w & = & 6 \\ 3x & +5y & -z & +6w & = & 17 \\ 2x & +4y & +z & +2w & = & 12 \\ 2x & & -7z & +10w & = & 7 \end{array} \right.$$

Indications. Utiliser la méthode du Pivot de Gauss.

Solution. (a) On commence par écrire la matrice augmentée du système :

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & -7 & 10 & -10 \end{array}\right)$$

Et on applique l'algorithme du Pivot de Gauss. Le premier coefficient de la première ligne est 1. On élimine tous les coefficients en dessous de ce pivot.

$$\begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -7 & 6 & -10 \end{array}\right)$$

Regardons maintenant la deuxième ligne. On voit que le coefficient en deuxième position est nul. Faisons alors un échange de lignes avec une dont ce coefficient n'est pas nul, et différente de la première. On peut par exemple prendre la troisième ligne.

$$(L_2 \leftrightarrow L_3) \qquad A_3 = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & -7 & 6 & -10 \end{array}\right)$$

Le deuxième coefficient est alors non nul. Rendons-le égal à 1. Pour cela, il suffit de multiplier la deuxième ligne par (-1).

$$(L_2 \leftarrow -L_2) \qquad A_4 = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & -7 & 6 & -10 \end{array}\right)$$

On recommence alors l'étape d'élimination pour rendre nuls tous les coefficients sous le pivot.

$$(L_4 \leftarrow L_4 + 4L_2) \qquad A_5 = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -6 \end{array}\right)$$

Le troisième coefficient de la troisième ligne est déjà non nul, et égal à 1. On recommence alors l'étape d'élimination pour annuler le coefficient sous le pivot :

$$(L_4 \leftarrow L_4 + 3L_3) \qquad A_6 = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On est arrivé à un système échelonné. Il y a 3 variables pivot (x, y, z) et une variable libre : w. A ce stade, on peut déjà dire qu'il y a donc une infinité de solutions, à un paramètre, puisqu'il n'y a pas d'équation impossible $0 = \cdots$.

On effectue l'étape de remontée en éliminant les coefficients au-dessus des pivots :

$$(L_2 \leftarrow L_2 - L_3) \ A_7 = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2) \ A_8 = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le système se réécrit ainsi, et on exprime les solutions en fonctions de la variables libre w :

$$\begin{cases} x \quad\quad\quad -2w = -2 \\ \quad y \quad\quad +2w = -1 \\ \quad\quad z \quad -2w = 2 \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x = 2w - 2 \\ y = -2w - 1 \\ z = 2w + 2 \\ w = w \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'ensemble des solutions est alors donné par :

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \ ; t \in \mathbb{R} \right\}$$

(b) On fait la même chose que dans le (a), mais éliminant en même temps les coefficients au-dessus et au-dessous du pivot à chaque étape d'élimination, ce qui permet de ne pas avoir d'étape de remontée. [1] On commence par écrire la matrice augmentée du système :

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

On remarque que le coefficient de la première ligne est non nul. On le rend égal à 1. Pour cela il suffit de diviser la ligne par 2.

$$(L_1 \leftarrow L_1 \times \tfrac{1}{2}) \qquad A_2 = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

On rend les coefficients situés sur la même colonne que ce 1 égaux à 0.

$$\begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Le deuxième coefficient de la deuxième ligne est non nul, on le rend égal à 1...

$$(L_2 \leftarrow L_2 \times \tfrac{1}{2}) \qquad A_4 = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 2 \end{array}\right)$$

... et on élimine les coefficients qui sont sur la même colonne que ce 1.

$$\begin{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{pmatrix} \qquad A_5 = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & \frac{1}{2} & 2 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Le troisième coefficient de la troisième ligne est non nul, on le rend égal à 1...

$$(L_3 \leftarrow L_3 \times 2) \qquad A_6 = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & \frac{1}{2} & 2 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 2 \end{array}\right)$$

... et on élimine les coefficients qui sont sur la même colonne que ce 1.

$$\begin{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{2}L_3 \end{pmatrix} \qquad A_7 = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

1. Ceci permet de trouver la forme « échelonnée réduite » du système. On pourrait tout aussi bien faire comme au-dessus en éliminant à chaque étape seulement les coefficient au-dessous du pivot pour arriver à un système échelonné, puis faire ensuite la remontée. Avantage : cela réduit le nombre d'étapes puisqu'il n'y a pas besoin de faire la remontée. Inconvénient : en fait, cela nécessite un tout petit peu plus de calculs.

Le quatrième coefficient de la quatrième ligne est non nul, on le rend égal à 1...

$(L_4 \leftarrow L_4 \times 2)$ $$A_8 = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{array}\right)$$

... et on élimine les coefficients qui sont sur la même colonne que ce 1.

$\begin{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{3}{2}L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \end{pmatrix}$ $$A_9 = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{array}\right)$$

Il y a ainsi une unique solution, donnée par $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(c) On procède exactement de la même manière que dans le premier exemple.
On commence par écrire la matrice augmentée du système.

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & -1 & 6 & 17 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & 0 & -7 & 10 & 7 \end{array}\right)$$

Le premier coefficient de la première ligne est égal à 1. On élimine alors les coefficients en-dessous.

$\begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{pmatrix}$ $$A_2 = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -7 & 6 & -5 \end{array}\right)$$

Le deuxième coefficient de la deuxième ligne est non nul. On le rend égal à 1...

$(L_2 \leftarrow L_2 \times (-1))$ $$A_3 = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -7 & 6 & -5 \end{array}\right)$$

... et on élimine les coefficients au-dessous de ce pivot

$(L_4 \leftarrow L_4 + 4L_2)$ $$A_4 = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -1 \end{array}\right)$$

Le troisième coefficient de la troisième ligne est déjà égal à 1. On élimine alors les coefficients qui sont au-dessous de ce pivot.

$(L_4 \leftarrow L_4 + 3L_3)$ $$A_5 = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

La dernière ligne de cette matrice correspond à l'équation impossible $0 = -1$, qui ne possède bien sûr aucune solution. Ainsi, le système ne possède aucune solution.

Système à paramètre

Exercice 8. Résoudre en fonction de $a \in \mathbb{R}$ le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} x & +2y & +z & = & 1 \\ 2x & +(a+4)y & +(a+2)z & = & 4 \\ -x & +(a-2)y & +z & = & a-1 \end{array} \right.$$

Indications. Utiliser le pivot de Gauss et distinguer différents cas qui dépendront de la valeur de a.

Solution. La matrice augmentée de ce système est donné par :

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & a+4 & a+2 & 4 \\ -1 & a-2 & 1 & a-1 \end{array}\right)$$

Le premier coefficient de la première colonne est 1. Éliminons les coefficients qui sont sur la même colonne que ce 1.

$\begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{pmatrix}$ $\qquad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & a & a & 2 \\ 0 & a & 2 & a \end{array}\right)$

1er cas. Si $a = 0$, le cas est particulier parce qu'on n'a pas de pivot dans la 2eme colonne. Mais dans ce cas, la dernière ligne correspond à l'équation $2 = 0$ qui ne possède aucune solution. Ainsi lorsque $a = 0$ le système ne possède aucune solution : $\mathcal{S} = \emptyset$.

Supposons maintenant $a \neq 0$. On peut donc éliminer les coefficients sous le a :

$(L_3 \leftarrow L_3 - L_2)$ $\qquad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{a} & a & 2 \\ 0 & 0 & 2-a & a-2 \end{array}\right)$

2ème cas Si $a = 2$, c'est un cas particulier car il n'y a pas de pivot dans la 3ème colonne. Alors la matrice est donnée par :

$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Elle est bien échelonnée. On voit déjà qu'il y a une infinité de solutions, paramétrées par la variable libre z.

Pour trouver ces solutions, on effectue l'étape de remontée

$(L_2 \leftarrow L_2/2)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\quad (L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Si on pose $z = t$, les solutions sont données par :

$$\begin{cases} x &= & -1 + t \\ y &= & 1 - t \\ z &= & t \end{cases}$$

Conclusion : lorsque $a = 2$, l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\}$$

Dernier cas. On suppose maintenant $a \neq 2$ (et toujours $a \neq 0$). On reprend notre matrice de tout à l'heure :

$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{a} & a & 2 \\ 0 & 0 & 2-a & a-2 \end{array}\right)$

On divise la dernière ligne par $2 - a$ (on peut le faire car cette quantité est non nulle). On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{a} & a & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

On a ainsi un système échelonné. On effectue maintenant la remontée :

$\begin{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - aL_3 \end{pmatrix}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 & 2+a \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$ $\quad (L_2 \leftarrow L_2/a)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{a}+1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$

$(L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{a}+1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$

Ainsi, dans le cas $a \notin \{0, 2\}$, il y a une unique solution, donnée par $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{a} \\ 1+\frac{2}{a} \\ -1 \end{pmatrix}$, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{a} \\ 1+\frac{2}{a} \\ -1 \end{pmatrix}$.

Applications

Exercice 9. Equilibrer la réaction chimique suivante :

$$a\mathrm{H_2O} + b\mathrm{Fe} \to c\mathrm{Fe(OH)_3} + d\mathrm{H_2}$$

Solution. Pour que cette équation soit équilibrée, il faut que :

$$\begin{cases} a = 3c \\ b = c \\ 2a = 3c + 2d \end{cases}$$

(on compte les atomes d'oxygène, de fer et d'hydrogène).

Ce système se représente grâce à la matrice augmentée : $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right)$

A nous de le résoudre grâce à l'algorithme du pivot de Gauss. On élimine les coefficients dans la même colonne que le premier 1.

$(L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right)$

On rend le troisième coefficient de la troisième ligne égal à 1.

$(L_3 \leftarrow L_3 \times \frac{1}{3})$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{3} & 0 \end{array}\right)$

Et on élimine les coefficients qui sont dans la même colonne que lui.

$\begin{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{pmatrix}$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{3} & 0 \end{array}\right)$

Ainsi, il y a une infinité de solutions (attention, ici vu le contexte nous avons besoin d'une solution entière et positive !). Les solutions du système sont de la forme :

$$S = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 2/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\}$$

Pour que la solution soit entière, il faut prendre un t qui soit multiple de 3. Ici nous n'avons besoin que d'une solution, prenons par exemple $t = 3$. On obtient alors

$$a = 6; b = 2; c = 2; d = 3$$

L'équation équilibrée est

$$6\mathrm{H_2O} + 2\mathrm{Fe} \to 2\mathrm{Fe(OH)_3} + 3\mathrm{H_2}$$

Exercice 10. Trouver une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passant par les points $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix}$.

Indications. Écrire ce que signifie que les trois points passent par la paraboles, on obtient alors 3 équations, d'inconnues a, b, c.

Solution. $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ appartient à la parabole. Cela signifie que $3 = a * 0^2 + b * 0 + c$ i.e. $c = 3$. De même, $\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ appartient à la parabole, cela signifie que $-5 = a * 2^2 + b * 2 + c$ i.e. $4a + 2b + c = -5$. Avec le dernier point, on trouve $49a + 7b + c = 10$. Ainsi on obtient un système de 3 équations à 3 inconnues, dont la matrice augmentée est donnée par : $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & -5 \\ 49 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

On commence par mettre un 1 tout en haut à gauche :

$\left(L_1 \leftarrow L_1 \times \frac{1}{4}\right)$ $\qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{-5}{4} \\ 49 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

Et on élimine les coefficients qui sont sur la même colonne que ce 1.

$\left(L_2 \leftarrow L_2 - 49L_1\right)$ $\qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{-5}{4} \\ 0 & \frac{-35}{2} & \frac{-45}{4} & \frac{285}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

Le deuxième coefficient de la deuxième ligne est non nul. On le rend égal à 1...

$\left(L_2 \leftarrow L_2 \times \frac{-2}{35}\right)$ $\qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{-5}{4} \\ 0 & 1 & \frac{9}{14} & \frac{-57}{14} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

...et on élimine les coefficients qui sont sur la même colonne que ce 1.

$\left(L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2\right)$ $\qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-1}{14} & \frac{11}{14} \\ 0 & 1 & \frac{9}{14} & \frac{-57}{14} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

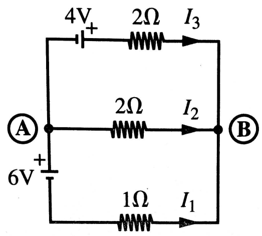
Le troisième coefficient de la troisième ligne est déjà égal à 1. Il ne reste plus qu'à éliminer les coefficients qui sont sur la même colonne.

$\begin{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{14}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{9}{14}L_3 \end{pmatrix}$ $\qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

Ainsi il n'y a qu'une parabole passant par ces trois points, et elle est donnée par l'équation

$$y = x^2 - 6x + 3.$$

Exercice 11. Déterminer l'intensité du courant I_1, I_2, I_3 passant par chacune des trois branches du circuit ci-contre.



Indications. Utiliser la loi des noeuds (la somme des intensités en chaque noeud est nulle) et la loi des mailles (la somme des tensions le long de chaque cycle est nulle).

Solution. La loi des noeuds dit que la somme des intensités entrantes en chaque noeud est nulle. Au noeud B, ça donne $I_1 + I_2 + I_3 = 0$. Au noeud A, ça donne $-I_1 - I_2 - I_3 = 0$, une équation équivalente.

La loi des mailles (de manière équivalente, en écrivant l'égalité des tensions entre A et B sur les 3 branches) donne : sur le cycle du haut $4 - 2I_3 + 2I_2 = 0$ et sur le cycle du bas, $-2I_2 + I_1 + 6 = 0$.

On a donc un système de 3 équations à 3 inconnues

$$\begin{cases} I_1 & +I_2 & +I_3 & = 0 \\ & 2I_2 & -2I_3 & = -4 \\ I_1 & -2I_2 & & = -6 \end{cases}$$

et on résoud

$$\begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2/2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} I_1 & +I_2 & +I_3 & = 0 \\ & I_2 & -I_3 & = -2 \\ & -3I_2 & -I_3 & = -6 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \end{matrix} \begin{cases} I_1 & +I_2 & +I_3 & = 0 \\ & I_2 & -I_3 & = -2 \\ & & -4I_3 & = -12 \end{cases}$$

Le système est échelonné, on voit qu'il a une unique solution. On effectue la remontée :

$$\begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{4}L_3 \end{matrix} \begin{cases} I_1 & +I_2 & +I_3 & = 0 \\ & I_2 & -I_3 & = -2 \\ & & I_3 & = 3 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \begin{cases} I_1 & +I_2 & +I_3 & = 0 \\ & I_2 & & = 1 \\ & & I_3 & = 3 \end{cases}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3 \begin{cases} I_1 & & & = -4 \\ & I_2 & & = 1 \\ & & I_3 & = 3 \end{cases}$$

On trouve ainsi $I_1 = -4\text{A}$, $I_2 = 1\text{A}$ et $I_3 = 4\text{A}$.

Bases de $\mathbb{R}^n$

Exercice 12. Soient

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{bmatrix}5\\-1\end{bmatrix}$$

Montrer que $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ est une base du plan $\mathbb{R}^2$ et déterminer les coordonnées de $\vec{u}$ par rapport à cette base.

Indications. Dans le cas du plan, on pourrait utiliser que deux vecteurs non colinéaires (c'est à dire non proportionnels) forment une base du plan, puis résoudre un système pour avoir les coordonnées de $\vec{u}$.

Dans la correction, on va utiliser la méthode qui se généralise à n vecteurs $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ de $\mathbb{R}^n$: si pour un vecteur $\vec{u}$, le système qui permet de calculer les coordonnées de $\vec{u}$ a une unique solution (c'est un système « non singulier »), alors $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ forment une base de $\mathbb{R}^n$ (et s'il y a 0 ou une infinité de solutions, ça n'est pas une base).

Solution. $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ si le système $x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 = \vec{w}$ a une unique solution, pour un $\vec{w}$ de notre choix. Ici, on va prendre $\vec{w} = \vec{u}$ pour trouver les coordonnées de $\vec{u}$ en même temps. On résoud donc

$$x\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\-1\end{bmatrix}$$

soit

$$\begin{cases} x & -y & = 5 \\ x & +2y & = -1 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \begin{cases} x & -y & = 5 \\ & 3y & = -6 \end{cases} L_2 \leftarrow L_2/3 \begin{cases} x & -y & = 5 \\ & y & = -2 \end{cases}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \begin{cases} x & & = 3 \\ & y & = -2 \end{cases}$$

On a donc une unique solution $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$. On en déduit à la fois que le système était non singulier, donc que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$, et que les coordonnées de $\vec{u}$ dans cette base sont $\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$.

Exercice 13. Pour chacune des familles de vecteurs suivantes, dire s'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}^3$. Si c'est le cas, déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{v} = \begin{bmatrix}2\\2\\3\end{bmatrix}$ dans cette base.

$$\text{(a)} \quad \vec{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix}1\\4\\8\end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$$

Indications. Procéder comme dans l'exercice précédent, en terme de systèmes non signuliers

Solution. (a). $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ ssi le système $x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3 = \vec{v}$ a une unique solution. Si c'est le cas, cette solution donnera les coordonnées de $\vec{v}$ dans cette base. On résoud donc le système suivant en écrivant les matrices augmentées

$$\begin{cases} x & +y & +z & = 2 \\ x & +2y & +4z & = 2 \\ x & +3y & +8z & = 3 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 3 \end{array}\right] \quad \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \end{array}\right] \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

A ce stade, le système est échelonné, et on sait qu'il a une unique solution donc que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base, mais on effectue la remontée pour avoir les coordonnées de $\vec{v}$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \\ \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \text{soit} \quad \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\-3\\1\end{bmatrix}.$$

Conclusion : $(\vec{u}_1, \vec{u}_2\vec{u}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et les coordonnées de $\vec{v}$ dans cette base sont $\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b). Même méthode. $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ ssi le système $x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 + z\vec{v}_3 = \vec{v}$ a une unique solution. Si c'est le cas, cette solution donnera les coordonnées de $\vec{v}$ dans cette base. On résoud donc le système suivant en écrivant les matrices augmentées

$$\begin{cases} x & +y & +4z & = 2 \\ 2x & +y & +5z & = 2 \\ 3x & +y & +6z & = 3 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -6 & -3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Il n'y a donc pas de solution, donc $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

Calcul matriciel

Exercice 14. Soient

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Déterminer, si possible, $2A$, $A - B$, $A + C$.

Indications. Les règles (voir votre cours) de sommation et de multiplication des matrices imposent des contraintes sur le nombre de lignes et de colonnes de celles-ci.

Solution. On peut toujours multiplier une matrice par un nombre, il suffit de multiplier chacun des coefficients de la matrice par ce nombre, quel que soit le nombre de lignes ou de colonnes de celle-ci. Ainsi

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les matrices A et B ayant le même nombre de lignes et de colonnes, on peut en calculer toute combinaison linéaire. Ici on calcule 1 fois A plus (-1) fois B :

$$A - B = \begin{pmatrix} 1+2 & 0+1 & 2-2 \\ -2-3 & 3-2 & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les matrice A et C n'ont pas les mêmes dimensions, on ne peut en calculer de combinaison linéaire. L'expression $A + C$ n'a donc ici pas de sens.

Exercice 15. Calculer le produit des matrices suivantes

(a) $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Indications. Si le nombre de colonnes de la matrice de gauche est égal au nombre de lignes de la matrice de droite, on peut calculer le produit des deux matrices en utilisant les règles de multiplication vues en cours.

Solution. En appliquant les règles de multiplication des matrices, on trouve donc :

(a)

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3).$$

Ici le résultat du produit est une matrice 1×1. Mais on peut toujours considérer qu'une matrice 1×1 est un nombre. Remarquons d'ailleurs que le résultat du produit est ici l'expression du produit scalaire des deux vecteurs (x_1, x_2, x_3) et (y_1, y_2, y_3). Le produit scalaire peut en effet être défini comme le produit *matriciel* d'un vecteur ligne et d'un vecteur colonne (qui sont eux-mêmes des matrices !). Le produit matriciel est donc un outil très pratique...

(b)

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \times 1 + (-1) \times (-2) + 2 \times 3 \\ 3 \times 1 + 2 \times (-2) + (-1) \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 \times 1 + (-1) \times (-2) + 2 \times 3 & -2 \times 2 + (-1) \times 1 + 2 \times (-1) \\ 3 \times 1 + 2 \times (-2) + (-1) \times 3 & 3 \times 2 + 2 \times 1 + (-1) \times (-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 16. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer, si possible, AB, AC, CA, A^2, C^2.

Indications. On peut calculer le produit matriciel AB uniquement dans le cas où le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. Si c'est le cas, on applique les règles de multiplication des matrices vues en cours.

Solution.

Avec la règle rappelée ci-dessus, on en déduit que les produits AB, CA, A^2 $(= AA)$ peuvent être calculés. En revanche, les produits AC et C^2 n'ont pas de sens, car le nombre de colonnes de la matrice de gauche n'est pas égal au nombre de lignes de la matrice de droite.

On a donc

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Une matrice dont les coefficients sont nuls s'appelle la matrice nulle et joue, pour les matrices, le même rôle que joue le 0 pour les nombres. Il est important de remarquer que, contrairement au produit de deux nombres non nuls qui est forcément non nul, on peut très bien multiplier deux matrices non nulles entre elles et obtenir une matrice nulle. Nous verrons plus tard l'interprétation géométrique de ce résultat.

De même

$$CA = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -5 & 10 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Et finalement

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

On peut remarquer que tous les coefficients de A^2 sont multiples de -3 et si l'on factorise par -3 on obtient alors de nouveau la matrice A. Ainsi A vérifie l'équation $A^2 = -3A$. Dans le cas de nombres, l'équation $x^2 = -3x$ possède exactement deux solutions possibles : $x = 0$ ou $x = -3$. Pour le prouver, on factorise l'équation comme $x(x+3)=0$ et l'on en déduit que soit $x=0$, soit $x+3=0$. Si l'on applique cette même méthode à l'équation matricielle $A^2=-3A$, on la factorise d'abord comme $A(A+3I)=0$, où I est la matrice identité (avec des 1 sur la diagonale et des zéros partout ailleurs). On pourrait être tenté de conclure que soit $A=0$, soit $A+3I=0$. Mais la matrice A du présent exercice, qui n'est ni nulle ni égale à $-3I$ est également solution de cette équation. Comme à l'exercice précédent, on voit que ce n'est pas parceque le produit de deux matrices est nul que l'une de ces deux matrices l'est.

Dans le monde des matrices, une équation du second degré peut donc avoir 3 solutions, et même plus ! Á titre d'exercice, vérifiez par exemple que les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont également solution.

Exercice 17. Démontrer ou donner un contrexemple à l'affirmation suivante.

Soit A une matrice $n \times p$ telle que pour tout vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$, $A.\vec{x}=\vec{0}$; alors tous les coefficients de A sont nuls.

Indications. On peut prendre pour $\vec{x}$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^p$...

Solution. Soit $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Alors $A.\vec{e}_1$ est égal à la première colonne de A. Comme $A.\vec{x}=\vec{0}$ pour tout $\vec{x}$, $A.\vec{e}_1=\vec{0}$ et on en déduit que la première colonne de A est nulle.

Plus généralement, pour tout $i \leq p$, $A.\vec{e}_i$ est égal à la i-ème colonne de A. Comme $A.\vec{e}_i=\vec{0}$, la i-ème colonne de A est nulle. Comme c'est vrai pour tout $i \leq p$, tous les coefficients de A sont nuls.

Matrice inverse

Exercice 18. Soient A, B les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérifier que B est la matrice inverse de A.

Indications. B est la matrice inverse de A (elles sont en fait inverses l'une de l'autre), si et seulement si A et B sont des matrices carrées de mêmes dimensions et le produit AB (comme le produit BA) vaut la matrice identité.

Solution. Deux méthodes sont possibles : la première consiste à calculer l'inverse de la matrice A (on verra plus tard comment le faire) et vérifier que l'on obtient la matrice B. Ce calcul est assez long. La deuxième méthode consiste à calculer le produit AB (si ce produit existe) et vérifier que l'on obtient la matrice identité. C'est beaucoup plus simple et c'est ce que nous allons faire ici.

Comme A et B sont des matrices carrées, de mêmes dimensions, on peut calculer :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0+2 & -4+2+2 & 3-1-2 \\ -1+0+1 & -4+2+1 & 3-2-1 \\ 2+0-2 & -8+6+2 & 6-3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le produit AB valant la matrice identité (de dimension 3), et A et B étant carrées, un théorème du cours nous dit que B est donc bien la matrice inverse de A (et on peut également vérifier que $BA=I$, mais le théorème du cours dit que c'est automatique).

Exercice 19. Soients

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 6 & -12 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer si ces matrices sont inversibles, et si c'est le cas, calculer leur inverse.

Indications. On a vu en cours une méthode systématique pour vérifier qu'une matrice est inversible et trouver son inverse basée sur l'algorithme du pivot de Gauss, qui consiste essentiellement à résoudre $A\vec{x} = \vec{b}$ avec un vecteur $\vec{b}$ générique.

Solution. Utilisons l'algorithme du pivot de Gauss pour déterminer l'inverse de A_1 : on rappelle que cette méthode consiste à résoudre $A.\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ avec b_1, b_2 variables.

$$\begin{cases} 2x_1 & -5x_2 & = & b_1 & \\ -x_1 & +3x_2 & = & & b_2 \end{cases}$$

Comme vu en cours, si on place les variables b_1, b_2 du second membre les unes au-dessus des autres, on peut ré-écrire cela sous forme matricielle :

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 2 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_1} \left(\begin{array}{rr|rr} 2 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow 2L_2} \left(\begin{array}{rr|rr} 2 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow 5L_2 + L_1} \left(\begin{array}{rr|rr} 2 & 0 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1} \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

La partie gauche de la matrice est la matrice identité. On conclut donc que A_1 est inversible et que $A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Il est immédiat de voir que les coefficients de la deuxième colonne de A_2 sont ceux de la première colonne multipliés par un facteur -2. A_2 n'est donc pas inversible (si l'on applique la même méthode que ci-dessus, on fait apparaître au bout d'une étape une ligne de 0 sur la ligne L_2 et donc lorsqu'on échelonne A_2, on a un seul pivot, et la matrice n'est donc pas inversible car le système associé possède 0 ou une infinité de solutions selon les valeurs du second membre $\vec{b}$).

Pour A_3, on applique la même méthode que pour A_1 (attention, il faut commencer par intervertir les lignes L_1 et L_2 pour avoir un pivot non nul en première ligne, première colonne) :

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - L_3]{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

On en conclut que A_3 est inversible et que $A_3^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Enfin on montre par cette même méthode que A_4 n'est pas inversible :

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

la partie gauche de la matrice est échelonnée, avec seulement 2 pivots (ce qui correspond au fait que le système $A_4.\vec{x} = \vec{b}$ peut avoir 0 ou une infinité de solution selon la valeur de $\vec{b}$), donc A_4 n'est pas inversible.

Exercice 20. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

(a) Vérifier que A est inversible et calculer A^{-1}.

(b) Résoudre le système $A\vec{x} = \vec{0}$.

(c) Résoudre $A\vec{x} = \vec{v}$, avec $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$.

Indications. Pour la première question, on procède comme dans l'exercice précédent. Une fois que A^{-1} est connue, la solution de $A\vec{x} = \vec{v}$ est $A^{-1}\vec{v}$ pour n'importe quel vecteur $\vec{v}$.

Solution.

(a) On trouve

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Comme $M\vec{0} = \vec{0}$ pour toute matrice M, la solution est simplement $\vec{x} = A^{-1}\vec{0} = \vec{0}$ (on peut retenir un résultat important : A est inversible *si et seulement si* l'équation $A\vec{x} = \vec{0}$ possède une unique solution $\vec{x} = \vec{0}$)

(c) En calculant $A^{-1}\vec{v}$, la solution de l'équation est $\vec{x} = (3, 1, 1)$.

Exercice 21. On considère le système

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} x & +y & -2z & = & -1 \\ x & +2y & -z & = & 2 \\ 2x & +3y & -2z & = & 3 \end{array} \right.$$

(a) Résoudre le système en utilisant A^{-1} (voir exercice 18)

(b) Résoudre le système homogène correspondant :

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} x & +y & -2z & = & 0 \\ x & +2y & -z & = & 0 \\ 2x & +3y & -2z & = & 0 \end{array} \right.$$

Indications. On résout le système en le réécrivant sous forme matricielle, puis en calculant l'inverse de la matrice associée (s'il existe).

Solution. On peut réécrire ce système sous la forme $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ où A est la matrice de l'exercice 18. En multipliant les 2 membres à gauche par A^{-1}, on obtient $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. On a montré que A était inversible et son inverse est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que la solution est $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

De même la solution du système homogène est $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}\vec{0} = \vec{0}$.

Exercice 22. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Vérifier que A est inversible et calculer A^{-1}.

(b) Résoudre le système $A\vec{x} = \vec{0}$.

(c) Résoudre $A\vec{x} = \vec{v}$, où $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(d) Soient $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ les vecteurs colonnes de A. En déduire les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ de $\mathbb{R}^3$.

Indications. On utilise les mêmes méthodes que dans l'exercice précédent.

Solution.

(a) En effectuant les calculs pour l'inverse, on montre que A est inversible et on obtient :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ -1 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

(b) La solution est comme à l'exercice précédent $\vec{x} = A^{-1}\vec{0} = \vec{0}$.

(c) On calcule $A^{-1}\vec{v}$ pour trouver $\vec{x} = (-2, -2, 3)$.

(d) Comme A est inversible, la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$. Dans celle-ci les coordonnées de $\vec{v}$ sont données par $A^{-1}\vec{v}$, soit $(-2, -2, 3)$ d'après la question précédente.

Exercice 23. On connait l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ valable pour tous réels a, b. Supposons maintenant que A, B sont des matrices de taille $n \times n$.

Trouver A, B tq $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

Quelle est la bonne formule pour $(A+B)^2$? A quelle condition sur A, B la formule $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ est-elle valide ?

Indications. On sait que le produit matriciel n'est pas commutatif. Si A et B sont deux matrices telles que les produits AB et BA aient un sens, en général on a $AB \neq BA$, ce qui modifie l'identité remarquable bien connue (qui est valable pour des nombres, réels ou complexes, dont le produit est, bien entendu, commutatif).

Solution. Prenons l'exemple des matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Enfin comme $A^2 = B^2 = 0$, $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on en déduit

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq (A+B)^2.$$

On développe le produit $(A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$. Pour que l'identité remarquable $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ soit valide, il suffit que $AB = BA$ (on dit alors que A et B commutent).

Exercice 24. Soit A, B deux matrices $n \times n$. Supposons que AB soit inversible. En déduire que A et B sont inversibles.

Indications. Pour montrer que A et B sont inversibles, il suffit de trouver une matrice C de même taille (carrée) que A et une matrice D de même taille (carrée) que B telles que $AC = I_n$ et $BD = I_n$.

Solution. On suppose que AB est inversible. Ainsi il existe une matrice M, inverse de AB telle que $(AB)M = M(AB) = I_n$. Or $(AB)M = ABM$, que l'on peut aussi écrire $A(BM)$. On a donc trouvé une matrice $C = BM$ telle que $AC = I_n$. C est donc l'inverse à droite de A. Comme ce sont des matrices carrées, l'inverse à droite est aussi l'inverse à gauche. Donc $AC = CA = I_n$ ce qui montre que A est inversible. De même, en posant $D = MA$, on a $DB = I_n$, donc B est inversible et son inverse est D.

Exercice 25. Soit A une matrice carrée $n \times n$ telle que $A^3 - 3A + 2I_n = 0$. Montrer que A est inversible.
Indication : donner une formule pour son inverse !

Indications. Une petite astuce : Si A est inversible, la multiplication de l'équation par A^{-1} donne $A^2 - 3I_n + 2A^{-1} = 0$...

Solution. Si A est inversible, d'apres l'indication, un bon pour candidat pour A^{-1} est donc la matrice $B = \frac{3}{2}I_n - \frac{1}{2}A^2$. On vérifie que $BA = AB = I_n$ en utilisant que $A^3 = 3A - 2I_n$

$$\begin{aligned} AB &= A \times (\frac{3}{2}I_n - \frac{1}{2}A^2) = \frac{3}{2}A \times I_n - \frac{1}{2}A \times A^2 = \frac{3}{2}A - \frac{1}{2}A^3 \\ &= \frac{3}{2}A - \frac{1}{2}(3A - 2I_n) = \frac{3}{2}A - \frac{3}{2}A + I_n = I_n \end{aligned}$$

On vérifie de la même façon que $BA = I_n$.

Puissances d'une matrice (Optionnel)

Exercice 26. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Vérifier que $M^3 = M$, mais que $M^2 \neq I_3$ (où I_3 est la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$).

(b) La matrice M est-elle inversible ?

(c) Déterminer M^n pour tout $n \geq 1$.

Solution. (a) On trouve

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

et $M^3 = M$.

(b) Raisonnons par l'absurde. Si M etait inversible, de $M^3 = M$ on déduirait en multipliant à gauche par M^{-1},

$$M^{-1} \times M^3 = M^{-1} \times M \text{ donc } M^2 = I_3$$

or on a vu que $M^2 \neq I_3$, c'est une contradiction. Donc M n'est pas inversible.

(c) Puisque $M^3 = M$, en multipliant par M on obtient $M^4 = M^2$ et $M^5 = M^3 = M$. De même $M^7 = M$, $M^9 = M$, e.t.c. On conjecture donc que $M^{2k+1} = M$ pour tout $k \geq 0$. Démonstration par récurrence : (i) vrai pour $k = 0$; (ii) Supposons que vrai pour un k, alors $M^{2(k+1)+1} = M^{2k+3} = M^{2k+1}M^2 = MM^2 = M^3 = M$.
On déduit que $M^{2k+2} = M^{2k+1}M = MM = M^2$, pour tout $k \geq 0$

III Exercices supplémentaires

Vous trouverez les réponses à ces exercices en fin de feuille de TD.

Exercice 27. Considerons le plan

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(a) Est-ce que $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{P}$?

(b) Donner une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

(c) Est-ce que $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{P}$? (utiliser la question précédente)

Exercice 28. Pour chacun des systèmes suivants, déterminer le nombre de solutions :

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{rrcr} x & +2y & = & 10 \\ 2x & -2y & = & -4 \\ 3x & +5y & = & 26 \end{array} \right. \qquad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{rrrcr} 2x & -y & +z & = & 0 \\ x & +y & -z & = & 0 \\ x & +4y & -4z & = & 0 \end{array} \right.$$

Exercice 29. Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{rrrrcr} x & +2y & +z & +2w & = & 0 \\ x & +2y & +2z & +3w & = & 0 \\ 2x & & -2z & +4w & = & 0 \\ x & +3y & +z & +3w & = & 0 \end{array} \right. \qquad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{rrrrcr} 2x & +2y & +5z & +5w & = & 0 \\ 2x & +2y & +4z & +6w & = & 0 \\ x & +y & +2z & +3w & = & 0 \\ -x & -y & -z & -4w & = & 0 \end{array} \right.$$

Exercice 30. A quelle condition sur le second membre les systèmes suivants ont-ils (au moins) une solution ?

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{rrrl} x & +y & -3z & = a \\ 3x & -2y & -z & = b \\ x & -2y & -2z & = c \end{array} \right. \qquad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{rrrl} 2x & +y & & = a \\ x & & +z & = b \\ 4x & +y & +2z & = c \end{array} \right. \qquad \text{(c)} \left\{ \begin{array}{rrl} 2x & +y & = a \\ x & -3y & = b \\ -x & +4y & = c \\ x & -y & = d \end{array} \right.$$

Exercice 31. Equilibrer la réaction chimique suivante :

$$a\mathrm{CL}_2 + b\mathrm{KOH} \rightarrow c\mathrm{KCl} + d\mathrm{KClO}_3 + e\mathrm{H}_2\mathrm{O}$$

Réponse. La plus petite solution entiere est $(a, b, c, d, e) = (3, 6, 5, 1, 3)$.

Exercice 32. Pour chacune des familles de vecteurs suivantes, dire s'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}^3$:

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Exercice 33. Soient

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(a) Montrer que $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer les coordonnées de $\vec{w}$ par rapport à cette base.

Exercice 34. Soient

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} \qquad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Montrer que $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées de $\vec{w}$ par rapport à cette base.

Exercice 35. Soient :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculer, si cela est possible, AB, BA, A^2, B^2.

Exercice 36. Calculer les produits AB, BA, A^2, B^2 des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 37. Soient

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -4 & +6 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer si ces matrices sont inversibles et déterminer leur inverse le cas échéant.

Exercice 38. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Calculer M^2, M^3, et M^4 ; comparer M^4 et M.

(b) En déduire que la matrice M n'est pas inversible.

(c) Déterminer M^n pour tout $n \geq 1$.

IV Réponse aux tests et exercices supplémentaires

Réponse au test 1. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \notin \mathcal{P}$ puisqu'il ne satisfait pas l'équation $2x - y + 3z = 2$. C'est la resprésentation cartésienne qui est utile.

La représentation paramétrique permet de construire facilement des points de $\mathcal{P}$. Par exemple, le point $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ est dans $\mathcal{P}$ (correspondant à $t_1 = t_2 = 0$). Si on fait $t_1 = 1, t_2 = 0$, on obtient un point $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; et on obtient $C = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ en faisant $t_1 = 0, t_2 = 1$. Ces 3 points ne sont pas alignés puisque $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont les 2 vecteurs $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ qui ne sont pas colinéaires.

Réponse au test 2. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 4t_1 + 7t_2 \\ 2 + 5t_1 + 8t_2 \\ 3 + 6t_1 + 9t_2 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 - t_1 - 2t_2 \\ 2 - t_1 - 3t_2 \\ 3 - t_1 - 4t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Réponse au test 3. (a) Non : la ligne de zéros n'est pas en bas. (b) Non, il y a un coef non nul sous le pivot de la 2e ligne. (c)(d) oui.

Réponse au test 4. (a),(b) oui. (c) non : le pivot de la 3eme ligne est à gauche du pivot de la 2eme ligne.

Réponse au test 5. On prend $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $A.\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y+3z \\ x-y-z \\ 2x-3y+z \end{bmatrix}$.

Réponse à l'exercice 27. (a) Il s'agit de savoir si le système

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

d'inconnues t_1, t_2 a une solution. Il n'en a pas donc $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \notin \mathcal{P}$

(b) On trouve que le système

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

a des solutions ssi $-x + \frac{3}{2}y + z - 1 = 0$. $\mathcal{P}$ a donc pour équation cartésienne $-x + \frac{3}{2}y + z - 1 = 0$.

(c) $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ est solution de $-x + \frac{3}{2}y + z - 1 = 0$ donc appartient à $\mathcal{P}$.

Réponse à l'exercice 28. (a) une unique solution (b) Une infinité de solutions (1 variable libre)

Réponse à l'exercice 29. (a) $Sol = \{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \}$ (b) $Sol = \{ s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \}$.

Réponse à l'exercice 30. (a) Le système a toujours une (unique) solution.

(b) Le système a une solution si et seulement si $-a - 2b + c = 0$

(c) Le système a une solution si et seulement si $-a + 9b + 7c = 0$ et $-2a - 3b + 7d = 0$ (il y a d'autres écritures possible du résultat)

Réponse à l'exercice 32. 2 méthodes possibles : on peut échelonner la matrice et voir s'il y a des variables libres, ou calculer le déterminant. (a) Non. (b) Oui.

Réponse à l'exercice 33. (a) Lorsqu'on échelonne le système

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

il n'y a pas de variable libre, donc c'est une base.

(b) En resolvant ce système on trouve $\vec{w} = 2\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2 + \vec{u}_3$, donc les coordonnées cherchées sont $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Réponse à l'exercice 34. On trouve $\begin{bmatrix} 14 \\ -7 \\ 8 \end{bmatrix}$ pour les coordonnées de $\vec{w}$.

Réponse à l'exercice 35. $BA = \begin{pmatrix} -4 & 5 & -1 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B^2 = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$

Réponse à l'exercice 36.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Réponse à l'exercice 37. $A_1^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. A_2 n'est pas inversible. $A_3^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. A_4 n'est pas inversible.

Réponse à l'exercice 38. (a) On trouve

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2M$$

(b) Si la matrice était inversible on pourrait déduire de $M^4 = 2M$ que $M^{-1}M^4 = 2M^{-1}M \iff M^3 = 2I_4$, (où I_4 est la matrice identité de $M_4(\mathbb{R})$), ce qui n'est pas le cas. Donc M n'est pas inversible.

(c) $M^5 = M^4M = 2MM = 2M^2$, $M^6 = M^4M^2 = 2M^3$, $M^7 = 2M^4 = 2^2M$. Plus generalement, comme $M^{4k} = (M^4)^k = 2^kI_4$, on ecrit $n = 4k + r$ avec $r = 0, 1, 2, 3$ (c'est la division euclidienne de n par 4, de reste r), et on obtient $M^n = M^{4k+r} = M^{4k}M^r = 2^kM^r$ et M^r est l'une des matrices I_4, M, M^2, M^3 selon la valeur de r.